

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE ROBUSTO
- TEORIA E APLICAÇÃO NO PROJETO DE CONTROLADORES DE DOIS
GRAUS DE LIBERDADE -

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

ALVARO GIUSTO

FLORIANÓPOLIS, MAIO DE 1995

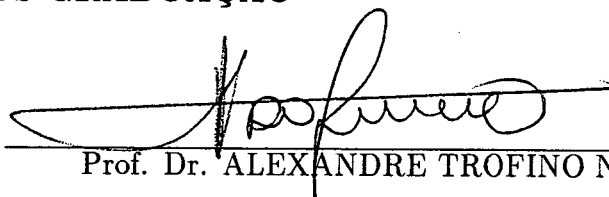
CONTROLE ROBUSTO
- TEORIA E APLICAÇÃO NO PROJETO DE CONTROLADORES DE DOIS
GRAUS DE LIBERDADE

ALVARO DANIELO GIUSTO OLIVERA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO SISTEMAS DE CONTROLE,
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. ALEXANDRE TROFINO NETO

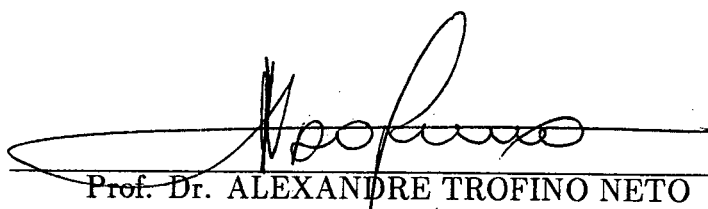
Orientador



Prof. ENIO VALMOR KASSICK

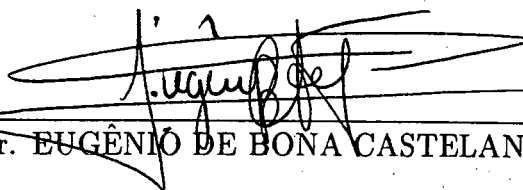
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

BANCA EXAMINADORA:



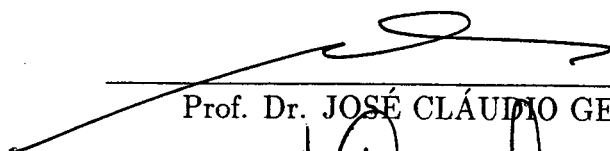
Prof. Dr. ALEXANDRE TROFINO NETO

Orientador

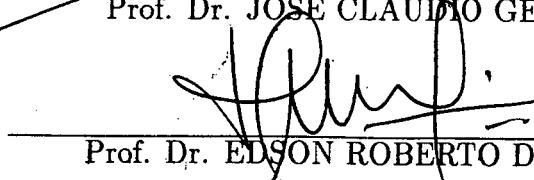


Prof. Dr. EUGÊNIO DE BONA CASTELAN NETO,

Co-orientador



Prof. Dr. JOSÉ CLÁUDIO GEROMEL



Prof. Dr. EDSON ROBERTO DE PIERI

A Gladys y Camilito.

A mis padres y a Jorge.

Agradecimentos

Aos professores Alexandre Trofino Neto e Eugênio de Bona Castelan, orientadores desta dissertação, pela sua competência, e seu estímulo constante.

Aos professores Julio Normey Rico, José Ribeiro Cury e Edson Roberto de Pieri, pelos ensinamentos recebidos.

A Josué Junior Guimarães e Othon Da Rocha Neves Jr. por sua valiosa colaboração.

Ao Departamento de Telemática da Faculdade de Engenharia Elétrica da Unicamp, por ter facilitado o acesso aos seus recursos computacionais.

A Tony e Harry da University of New Mexico, e ao COMUT, por sua eficiência na assistência bibliográfica.

Ao conjunto (tão cosmopolita !) de amigos que compartilharam suas vidas conosco.

A Julio, Ana, Maricel, Ernesto, Ricardo, Rafael, Maruja e Lydia, pela amizade e o apoio durante estes anos.

A Wilson Silva Costa, pela amizade, solidariedade, e por ter encontrado o que eu não deveria ter perdido.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

A la CSIC y el CONICYT, por la asistencia financiera.

Aos povos brasileiro e uruguaio, sem os quais, nada seria possível.

Resumo

A Teoria de Controle Robusto tem sua origem na crítica dos métodos de projeto próprios da Teoria de Controle Moderna, que acusaram severos inconvenientes na sua aplicação industrial. A razão dessas dificuldades reside na ausência de uma metodologia que permitisse uma análise quantitativa profunda da influência que os elementos incertos do modelo têm sobre o comportamento do sistema físico controlado.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia de análise de sistemas a partir de modelos matemáticos lineares com elementos incertos. Com este fim são revisados alguns conceitos da teoria de sistemas dinâmicos lineares, tais como os espaços de sinais e de sistemas e suas normas associadas. Destaca-se a utilização desses conceitos na modelagem de sistemas incertos. Considera-se especialmente a classe de incertezas estruturadas, resultantes da composição de múltiplos elementos incertos.

As técnicas de análise são logo utilizadas como ferramentas de síntese de controladores com o intuito de obter um sistema em malha fechada com propriedades robustas adequadas. São apresentadas as técnicas de controle em \mathcal{H}_∞ , \mathcal{H}_2 e μ -síntese.

Os requisitos de desempenho dos sistemas de controle são então classificados em duas categorias e, em cada caso, é analisada sua relação com a estrutura de controle mais adequada. É estudada a utilidade dos controladores de dois graus de liberdade frente a requisitos de robustez, rejeição de perturbações e seguimento de sinais de referência. Para esse tipo de controlador são propostas duas metodologias de projeto em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , que constituem uma contribuição original deste trabalho.

Os conceitos e algumas das técnicas descritas são aplicados a um exemplo relativo à estabilização robusta e melhora de desempenho de um helicóptero em vôo pairado.

Resumen

La Teoría de Control Robusto tiene su origen en la crítica de los métodos de diseño propios de la Teoría de Control Moderna, que acusaron severos inconvenientes en su aplicación industrial. La razón de esas dificultades reside en la ausencia de una metodología que permita un análisis cuantitativo profundo de la influencia que tiene la incertidumbre del modelo sobre el comportamiento del sistema físico controlado.

El presente trabajo tiene como objetivo presentar una metodología de análisis de sistemas a partir de modelos matemáticos lineales con elementos inciertos. Con este fin son revisados algunos conceptos de la teoría de sistemas dinámicos lineales, tales como los espacios de señales y de sistemas y sus normas asociadas. Es destacada la utilización de esos conceptos en el modelado de sistemas inciertos. Es considerada especialmente la clase de incertidumbres estructuradas, resultante de la composición de múltiples elementos inciertos.

Las técnicas de análisis son entonces utilizadas como herramientas de síntesis de controladores que garanticen un sistema en lazo cerrado con propiedades robustas adecuadas. Son presentadas las técnicas de control en \mathcal{H}_∞ , \mathcal{H}_2 y la μ -síntesis.

A continuación los requisitos de desempeño de los sistemas de control son clasificados en dos categorías y, en cada caso, es analizada su relación con la estructura de control más adecuada. Es estudiada la utilidad de los controladores de dos grados de libertad frente a requisitos de robustez, atenuación de perturbaciones y seguimiento de señales de referencia. Para ese tipo de controlador son propuestas dos metodologías de diseño en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , que constituyen una contribución original de este trabajo.

Los conceptos y algunas de las técnicas descritas son aplicados a un ejemplo relativo a la estabilización robusta y mejora de desempeño de un helicóptero operando en *hover*.

Abstract

The Robust Control Theory has its origin in some efforts to overcome some drawbacks of the design methods of the Modern Control Theory, which often lead the designed controller to fail in practice. These problems were related to the lack of a consistent methodology to analyze the influence of the model uncertainty on the closed loop system behavior.

This work is intended to present an analysis methodology of systems described by linear models with some uncertain elements. Some concepts from the linear dynamic systems theory like the signals and systems spaces and their associated norms are studied. The usefulness of these concepts when modeling uncertain systems is emphasized and special attention is devoted to the case of structured uncertainties.

The analysis techniques are then used for synthesis purposes in order to get controllers that guarantee a closed loop system with adequate robust properties. The μ -synthesis and the \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 design methods are presented.

The performance requirements are classified in two classes and their relation with the controller structure is analyzed. It is studied the usefulness of the two-degrees-of-freedom controllers when several requirements, such as robustness, disturbance attenuation and tracking, must be satisfied. A contribution of this work is to present new \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ design methodologies for two-degrees-of-freedom controllers.

The described techniques are illustrated with an example about the robust stabilization and performance improvement of a helicopter model operating near hover.

Lista de Figuras

1.1	<i>Sistema Realimentado Padrão</i>	8
1.2	<i>Modelo Multiplicativo de Incerteza Dinâmica</i>	15
1.3	<i>Formulação Canônica</i>	16
1.4	<i>Interconexão de componentes incertos</i>	18
2.1	<i>Modelo de Sistema Incerto</i>	20
2.2	<i>Teorema do Pequeno Ganho</i>	23
2.3	<i>Análise Robusta via "Scalings"</i>	31
2.4	<i>Problema de Desempenho Robusto</i>	32
3.1	<i>Diagrama de Interconexão Padrão usado para Síntese</i>	34
3.2	<i>μ-Síntese</i>	42
4.1	<i>Sistema Controlado por um Controlador de Dois Graus de Liberdade</i>	46
4.2	<i>Controlador de Dois Graus de Liberdade</i>	49
4.3	<i>Sistema Controlado por um Controlador de Dois Graus de Liberdade</i>	49
4.4	<i>Esquema de "Model Following"</i>	51
4.5	<i>Estrutura de Interconexão $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{H}_2)$</i>	51
4.6	<i>Síntese \mathcal{H}_∞ em um só passo</i>	52
4.7	<i>Representação Standard para a Síntese do Prefiltro</i>	54
5.1	<i>Sistema de Coordenadas</i>	60
5.2	<i>Modelo Incerto do Helicóptero</i>	63

5.3	<i>Modelo Incerto na Forma Canônica</i>	63
5.4	<i>Esquema de Interconexão para μ-Síntese</i>	66
5.5	<i>Esquema de Interconexão Padrão para μ-Síntese</i>	66
5.6	<i>Análise de Estabilidade Robusta</i>	68
5.7	<i>Análise em Malha Fechada para o Controlador K_1</i>	69
5.8	<i>Análise Comparativa do Cálculo de μ via "Scaling" Constante</i>	70
5.9	<i>Análise em Malha Fechada para o Controlador K_2</i>	72
D.1	<i>Transformações Fracionárias Lineares</i>	90
D.2	<i>Sistema Controlado Incerto</i>	90

Lista de Tabelas

2.1 *Análise de Sistemas Incertos* 33

Notação

$A > 0$	$A_{n \times n}$ é matriz definida positiva
A'	Transposta de A
$\ \cdot \ $	Norma euclidiana
$\ \cdot \ _{\infty}$	Norma ∞
$\bar{\sigma}(\cdot)$	Máximo valor singular da matriz (\cdot)
$\mu(\cdot)$	Valor singular estruturado da matriz (\cdot)
$\mathcal{F}_l(\cdot), (\mathcal{F}_u(\cdot))$	Transformação Fracionária Linear inferior (superior)
$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	$C(sI - A)^{-1}B + D$

Índice

Introdução	1
1 Elementos da Teoria de Controle Robusto	4
1.1 Introdução	4
1.2 Normas e Espaços Normados	5
1.2.1 Norma \mathcal{H}_2	6
1.2.2 Norma \mathcal{H}_∞	8
1.3 Modelagem de Sistemas Incertos	13
1.3.1 Modelo Multiplicativo da Incerteza Dinâmica	14
1.3.2 Formulação Canônica	16
1.4 Conclusão	18
2 Análise de Sistemas Incertos	20
2.1 Introdução	20
2.2 Desempenho Nominal	21
2.3 Análise de Sistemas com Incerteza não Estruturada	21
2.3.1 Estabilidade Robusta	21
2.3.2 Desempenho Robusto	23
2.4 Análise de Sistemas com Incerteza Estruturada	24
2.4.1 Estabilidade Robusta	25
2.4.2 Cálculo e Propriedades de μ	27

2.4.3	Desempenho Robusto	32
2.5	Conclusão	33
3	Síntese de Controladores	34
3.1	Introdução	34
3.2	Problemas Padrão em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	35
3.3	μ -Síntese	41
3.3.1	Iteração $\mathcal{D}\text{-}\mathcal{K}$	42
3.3.2	Iteração $\mathcal{D}\text{-}\mathcal{K}$ com <i>Scaling</i> Constante	43
3.4	Conclusão	45
4	Controladores de Dois Graus de Liberdade	46
4.1	Introdução	46
4.2	Fundamentos	48
4.3	Técnicas de Síntese de Controladores de Dois Graus de Liberdade	50
4.4	Técnicas de Projeto em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para uma Classe de Prefiltros	52
4.4.1	Síntese do Prefiltro em \mathcal{H}_∞	55
4.4.2	Síntese do Prefiltro em \mathcal{H}_2	55
4.5	Conclusão	57
5	Aplicação	58
5.1	Introdução	58
5.2	Elementos da Dinâmica do Helicóptero	59
5.3	Apresentação do Exemplo	61
5.3.1	Modelagem das Incertezas	61
5.3.2	Especificações de Desempenho	63
5.4	Projeto mediante μ -Síntese	64
5.4.1	Análise de Desempenho	67

5.5	Projeto do Prefiltro	70
5.5.1	Análise de Desempenho	71
5.6	Conclusão	73
	Conclusão	74
	Bibliografia	76
	A Equação de Riccati	82
	B Desigualdades Matriciais Lineares	84
	C Valores Singulares	87
	D Transformações Fracionárias Lineares	89
	E Exemplo	91
	F Transparências da Defesa	93

Introdução

Desde o trabalho pioneiro de James Watt no regulador da sua máquina de vapor, passando pelos amplificadores realimentados que motivaram o trabalho de Bode, até o estado atual da teoria, o conceito de realimentação está intimamente relacionado com a Teoria de Controle.

Porque é necessário realimentar?

A razão reside na incerteza, tanto do processo físico quanto das perturbações externas agindo sobre ele. Em geral, o modelo matemático não pode representar fielmente o sistema físico seja porque este varia ao longo do tempo, seja porque é parcialmente desconhecido, ou porque frente à sua complexidade é conveniente trabalhar com um modelo aproximado relativamente simples e, portanto, impreciso. Por outro lado, a presença de perturbações que agem sobre o sistema e que não são totalmente conhecidas impõe a necessidade da realimentação para poder-las compensar ou atenuar parcialmente.

A realimentação é, então, a ferramenta básica do projetista para obter algum tipo de desempenho frente às incertezas do sistema e às perturbações externas agindo sobre este.

No presente trabalho vamos estudar metodologias de projeto que permitam estabilizar o sistema e garantir determinados requisitos de desempenho de face às incertezas no modelo do sistema.

A teoria clássica de controle introduziu os conceitos de margens de ganho e de fase, adequados para garantir estabilidade frente às variações do processo em sistemas com uma entrada e uma saída.

Por outro lado, a chamada Teoria de Controle Moderno, abordou os sistemas com várias entradas e saídas, convenientemente expressos no espaço de estados. Foram desenvolvidas técnicas de projeto que asseguram um desempenho ótimo para um critério quadrático, na hipótese de ter-se um modelo que representa exatamente o sistema físico envolvido. Porém, essas técnicas têm características de robustez razoáveis somente quando todo o vetor de estados está disponível para realimentação; caso contrário, não garantem nenhuma margem de estabi-

lidade, e uma pequena variação do processo pode tornar o sistema instável. Este fato originou problemas na aplicação industrial das técnicas desenvolvidas pela Teoria Moderna e motivou uma nova linha de pesquisa baseada em hipóteses mais realistas.

Esta é conhecida pelo nome de Teoria de Controle Robusto. O termo "robusto" é utilizado aqui no sentido de que as propriedades do sistema controlado sejam mantidas frente às variações do modelo matemático. Tornou-se necessário incluir as incertezas explicitamente na análise. O processo agora é representado por uma família de modelos descrita por um modelo nominal e pelas variações em torno deste, chamadas genericamente de incertezas, as quais são desconhecidas mas limitadas em norma.

É importante uma cuidadosa modelagem das incertezas. Os conceitos clássicos de margem de ganho e de fase permitem estudar incertezas escalares que variam em magnitude ou em fase. Mas a realidade é muito mais complexa. É necessário incorporar o comportamento freqüencial, dado que é comum ter um modelo precisamente conhecido em regime permanente, mas extremamente incerto em altas freqüências. Além disso, as incertezas no modelo podem se originar em diferentes componentes do sistema de controle, tais como atuadores, sensores, ou na própria planta. Isto leva a incerteza a ter uma estrutura dada, a qual deve ser convenientemente considerada para evitar projetos muito conservativos.

A Teoria de Controle Robusto também possibilitou uma modelagem mais realista, em geral, das perturbações externas. Estas foram modeladas, no Controle Clássico, como sinais de forma conhecida (degraus, impulsos, senóides, etc.). O Controle Moderno introduziu uma descrição probabilística e as perturbações foram tratadas como processos estocásticos de densidade de potência conhecida. As técnicas de Controle Robusto que vamos abordar assumem perturbações de energia limitada e ponderada convenientemente no domínio freqüencial. Além disso o critério de desempenho está expresso em função do pior caso, isto é, procura-se atenuar o efeito das perturbações supondo-se que elas comportam-se da maneira na que mais afetam o desempenho do sistema.

No capítulo 1 são apresentados os fundamentos da Teoria de Controle Robusto, tais como os conceitos de norma, espaços de sinais e de sistemas, e a modelagem de sistemas incertos. No capítulo 2 são abordados os problemas de análise para as classes de sistemas e incertezas estudadas. A síntese de controladores ótimos com relação às normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ é estudada no capítulo 3, conjuntamente com a μ -síntese.

No capítulo 4 é estudada a utilidade dos controladores de dois graus de liberdade frente a requisitos de robustez, rejeição de perturbações e seguimento de sinais de referência. Apresenta-se também uma metodologia de projeto de uma classe de prefiltros ótimos com

relação às normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Os conceitos e alguma das técnicas descritas são aplicadas no capítulo 5 a um exemplo relativo à estabilização robusta e melhora de desempenho de um helicóptero em voo pairado.

Os apêndices que encerram a presente dissertação foram incluídos com o objetivo de oferecer ao leitor uma rápida referência sobre alguns conceitos necessários à compreensão do texto.

Capítulo 1

Elementos da Teoria de Controle Robusto

1.1 Introdução

A impossibilidade de se ter um modelo matemático que represente fielmente o comportamento da planta leva à necessidade de trabalhar com uma família de modelos. Assim sendo, assume-se que o processo físico se comporta de acordo com um elemento, incerto, desta família.

O modelo passa a ter agora uma componente de incerteza que não foi considerada explicitamente nas teorias clássica e moderna.

Vamos dizer que uma propriedade do sistema de controle é robusta se ela é válida para todos os elementos da família de modelos. É nesse sentido que vamos falar de estabilidade robusta, desempenho robusto, etc..

A teoria de Controle Robusto tem diversas linhas de pesquisa, segundo as propriedades do tipo de sistema estudado (linearidade, invariância no tempo, etc.), como é feita a caracterização das incertezas, e quais as especificações de desempenho. O presente trabalho centra-se na teoria de controle em \mathcal{H}_∞ e no valor singular estruturado, μ . Esta linha de pesquisa teve uma importância notável no desenvolvimento da teoria, devido à generalidade da classe de sistemas incertos estudada. Os sistemas considerados são lineares, invariantes no tempo e multivariáveis. Os critérios de desempenho e a caracterização das incertezas são estudados nas seções 1.2 e 1.3.

1.2 Normas e Espaços Normados

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos matemáticos, os quais nos permitirão caracterizar as incertezas, perturbações e índices de desempenho. Para uma exposição mais profunda e abrangente pode-se consultar as referências [15, 31, 63].

Definição 1.1 *Chama-se Espaço Vetorial Normado à estrutura formada por um espaço vetorial \mathcal{V} e uma função real (chamada de norma) $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisfaz os seguintes axiomas:*

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}$.
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{V}, \alpha \in \mathbb{C}$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{V}$.

Exemplo No espaço \mathcal{C}^n podemos definir as seguintes normas:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

Ao longo deste trabalho vamos trabalhar em \mathcal{C}^n com a norma euclidiana $\|\cdot\|_2$. Para evitar confusões com as normas definidas posteriormente, vamos notá-la $\|\cdot\|$.

Definição 1.2 *Dados dois espaços vetoriais V e W e uma transformação linear $\mathcal{L} : V \rightarrow W$, a norma induzida da transformação é definida por :*

$$\|\mathcal{L}\| \triangleq \sup_{\|v\|_V \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

sendo $\|\cdot\|_V$ e $\|\cdot\|_W$ as normas em V e W , respectivamente.

O conceito de norma induzida nos permite abordar a importante questão da norma de uma transformação linear. A mesma, assim definida, cumpre a seguinte relação:

$$\|\mathcal{L}(v)\|_W \leq \|\mathcal{L}\| \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Exemplo Para as matrizes $A \in \mathcal{C}^{m \times n}$, considerando a norma 2 em \mathcal{C}^n e \mathcal{C}^m ,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\|_2 \neq 0} \sqrt{\frac{x' A^* A x}{x' x}} = \bar{\sigma}(A)$$

sendo $\bar{\sigma}(A)$ o máximo valor singular de A . O apêndice C inclui a definição e principais propriedades dos valores singulares.

1.2.1 Norma \mathcal{H}_2

Definição 1.3 Para $t \in \mathbb{R}$, seja $r(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma função matricial e $R(s) \in \mathcal{C}^{m \times n}$ sua transformada de Laplace, onde $s = \lambda + j\omega \in \mathcal{C}$.

(a) $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times n})$ é o espaço de Lebesgue das funções $r(t)$ quadraticamente integráveis, tendo norma dada por

$$\|r\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[r(t)'r(t)] dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

(b) $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R}, \mathcal{C}^{m \times n})$ é o espaço de Lebesgue das funções $R(j\omega)$ quadraticamente integráveis, tendo norma dada por

$$\|R\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[R(j\omega)^* R(j\omega)] d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

para $\omega \in \mathbb{R}$.

(c) $\mathcal{H}_2(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{m \times n})$ é o espaço de Hardy das funções $R(s)$ analíticas em $\Re(s) > 0$ e que satisfazem a condição

$$\|R\|_2 = \left\{ \sup_{\lambda > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[R(\lambda + j\omega)^* R(\lambda + j\omega)] d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

As funções de transferência estritamente próprias e estáveis formam um subespaço de \mathcal{H}_2 , que notaremos \mathcal{RH}_2 . Para calcular a norma \mathcal{H}_2 é necessário considerar um prolongamento analítico sobre o eixo imaginário $j\mathbb{R}$, dado que as funções de \mathcal{H}_2 não estão necessariamente definidas em $j\mathbb{R}$. A norma \mathcal{H}_2 passa a ser calculada como na equação (1.2).

$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ é o espaço dos sinais vetoriais de dimensão n quadraticamente integráveis e a norma \mathcal{L}_2 não é outra coisa que a energia do sinal:

$$\|r\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} r(t)'r(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Este espaço é importante na caracterização das entradas externas ao sistema de controle.

A transformada de Laplace estabelece um mapeamento isomorfo entre os espaços \mathcal{L}_2 e \mathcal{H}_2 . Esse mapeamento conserva a norma (**teorema de Parseval**):

$$\|R(s)\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[R(j\omega)^* R(j\omega)] d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[r(t)' r(t)] dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \|r(t)\|_2$$

Consideremos agora o sistema dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

onde assumimos que A é estável. Sua matriz de transferência é dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ e a matriz de resposta a impulso é $g(t) = Ce^{At}B$.

Cálculo da norma \mathcal{H}_2 A definição (1.2) não é apropriada para propósitos de cálculo. Porém, a norma pode ser calculada como

$$\|G(s)\|_2^2 = \text{Tr}\{B' L_o B\} = \text{Tr}\{C L_c C'\}$$

Onde L_o e L_c , os gramianos de observabilidade e controlabilidade respectivamente, são definidos como

$$\begin{aligned} L_o &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{A't} C' C e^{At} dt \\ L_c &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{At} B B' e^{A't} dt \end{aligned}$$

e fornecem as equações de Lyapunov :

$$A' L_o + L_o A + C' C = 0 \quad (1.3)$$

$$A L_c + L_c A' + B B' = 0 \quad (1.4)$$

Para mostrar a igualdade envolvendo o gramiano L_o vamos usar o teorema de Parseval para calcular a norma:

$$\|G(s)\|_2^2 = \|g(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[B' e^{A't} C' C e^{At} B] dt = \text{Tr} \left\{ B' \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{A't} C' C e^{At} dt \right] B \right\} = \text{Tr}\{B' L_o B\}$$

A igualdade envolvendo o gramiano de controlabilidade pode ser mostrada mediante a identidade

$$\text{Tr}[B' e^{A't} C' C e^{At} B] = \text{Tr}[C e^{At} B B' e^{A't} C']$$

O cálculo da norma \mathcal{H}_2 envolve a resolução de uma equação de Lyapunov, a qual tem solução única se o sistema é estável e completamente observável (controlável).

A norma \mathcal{H}_2 tem tido um importante papel na Teoria de Controle como índice de desempenho [11, 15, 25, 30, 31, 47].

Vamos considerar o sistema de controle da figura 1.1. Nela estão representados o controlador realimentado K ; e a planta generalizada G , que inclui a planta, e todas as funções introduzidas com fins de ponderação. O sinal w contém as entradas externas, incluindo perturbações, ruído de sensores e comandos; u é a ação de controle; y representa as saídas medidas para fins de realimentação; e z é um sinal de erro em relação a um objetivo especificado embutido em $G(s)$.

O problema padrão de otimização em \mathcal{H}_2 consiste na obtenção do controlador que minimiza a norma \mathcal{H}_2 da transferência T_{zw} entre as perturbações w e as saídas de interesse z .

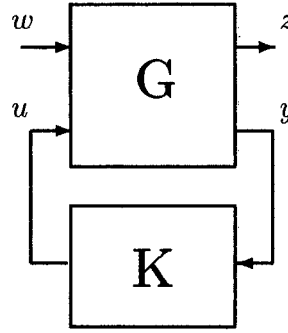


Figura 1.1: *Sistema Realimentado Padrão*

Este tema será estudado com mais profundidade na seção 3.2. Por enquanto vamos nos deter no significado de minimizar $\|T_{zw}\|_2$. Quando as perturbações são sinais de forma conhecida, é possível representá-las como a saída de um sistema dinâmico excitado por um impulso. Essa dinâmica pode ser incorporada à planta G a qual considera-se como sendo excitada por perturbações w impulsivas [31, 47, 63]. O sinal $z(t)$ será a resposta impulsional do sistema, e a sua norma coincidirá com $\|T_{zw}\|_2$. Se modelarmos as perturbações como processos estocásticos de densidade de potência conhecida, $\|T_{zw}\|_2$ coincide com o valor esperado da energia do sinal de saída. Portanto o objetivo do controle ótimo em \mathcal{H}_2 é minimizar a influência das perturbações sobre as saídas, quando aquelas são sinais determinísticos de forma conhecida ou processos estocásticos de espectro conhecido.

A conveniência da norma \mathcal{H}_2 como índice de desempenho em uma aplicação particular está relacionada com a caracterização correspondente do conjunto de perturbações.

1.2.2 Norma \mathcal{H}_∞

Definição 1.4 Para $t \in \mathbb{R}$ seja $r(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma função matricial e $R(s) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ sua trans-

formada de Laplace, onde $s = \lambda + j\omega \in \mathcal{C}$, λ e $\omega \in \mathbb{R}$.

(a) $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{C}^{m \times n})$ é o espaço de Lebesgue das funções $r(t)$ limitadas, tendo norma dada por

$$\|r\|_\infty = \sup_t \bar{\sigma}\{r(t)\} \quad (1.5)$$

(b) $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R}, \mathcal{C}^{m \times n})$ é o espaço de Lebesgue das funções $R(j\omega)$ limitadas para todo ω , tendo norma dada por

$$\|R\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}\{R(j\omega)\} \quad (1.6)$$

(c) $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{m \times n})$ é o espaço de Hardy das funções $R(s)$ analíticas em $\Re(s) > 0$, e que satisfazem

$$\sup_{\lambda > 0} \bar{\sigma}\{R(\lambda + j\omega)\} < \infty$$

Considerações análogas às da norma \mathcal{H}_2 levam à definição da norma \mathcal{H}_∞ utilizando um prolongamento analítico sobre o eixo imaginário. Como consequência do Princípio do Módulo Máximo¹, o supremo é alcançado no eixo imaginário. Portanto, a norma \mathcal{H}_∞ pode ser definida como:

$$\|R\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}\{R(j\omega)\} = \sup_{s \in \mathcal{C}_+} \sigma_{\max}\{R(s)\} \quad (1.7)$$

O conjunto das transferências assintoticamente estáveis forma um subespaço de \mathcal{H}_∞ que notaremos \mathcal{RH}_∞ . Funções em \mathcal{RH}_2 são funções racionais estritamente próprias, que se anulam para $\omega \rightarrow \infty$; funções em \mathcal{RH}_∞ são funções próprias que, para $\omega \rightarrow \infty$ podem apresentar um valor constante

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\lambda + j\omega) \rightarrow D \neq 0$$

A seguir vamos destacar duas propriedades importantes da norma \mathcal{H}_∞ .

Propriedade 1.1 A norma \mathcal{H}_∞ é a norma induzida por \mathcal{L}_2 sobre si mesmo

Consideremos um sistema estável $G(s)$, o qual constitui uma transformação linear de \mathcal{L}_2 em \mathcal{L}_2 . O sinal de entrada w pertence a \mathcal{L}_2 , com norma

$$\|w\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)^* W(j\omega) d\omega$$

Então, a norma da saída z será

$$\|z\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega)^* Z(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)^* G(j\omega)^* G(j\omega) W(j\omega) d\omega$$

¹O valor máximo do módulo de uma função analítica é alcançado na fronteira de seu domínio de analiticidade.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[G(j\omega)^* G(j\omega) W(j\omega) W(j\omega)^*] d\omega \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[\sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] W(j\omega) W(j\omega)^*] d\omega \\
&= \|G\|_{\infty}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[W(j\omega)^* W(j\omega)] d\omega \\
&= \|G\|_{\infty}^2 \|w\|_2^2
\end{aligned}$$

Pode-se ver que a igualdade pode ser atingida considerando uma entrada $w_0 \in \mathcal{L}_2$ que tenha a sua energia concentrada em uma faixa arbitrariamente estreita em torno da frequência ω_0 na qual $\bar{\sigma}[G(j\omega)]$ atinge seu máximo. Adotemos, então, $w_0(t) = v_1 \exp(-\epsilon + j\omega_0)t$, $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno para que $w_0(t) \in \mathcal{L}_2$, sendo v_1 o vetor singular direito correspondente ao máximo valor singular de $G(j\omega_0)$.

$$\|G(s)w_0(s)\|_2 = \|G(j\omega_0)v_1\|_2 = \bar{\sigma}[G(j\omega_0)] = \sup_{j\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] = \|G(s)\|_{\infty}$$

Portanto,

$$\|G\|_{\infty} = \sup_w \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} : w \in \mathcal{L}_2, \|w\|_2 \neq 0 \right\}$$

Propriedade 1.2 A norma \mathcal{H}_{∞} é submultiplicativa:

$$\|G(s)H(s)\|_{\infty} \leq \|G(s)\|_{\infty} \|H(s)\|_{\infty} \quad \forall G, H \in \mathcal{H}_{\infty}$$

Essa propriedade é consequência das propriedades submultiplicativas dos operadores máximo valor singular e supremo:

$$\begin{aligned}
\|G(s)H(s)\|_{\infty} &= \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)H(j\omega)] \leq \sup_{\omega} \{\bar{\sigma}[G(j\omega)]\bar{\sigma}[H(j\omega)]\} \\
&\leq \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \sup_{\omega} \bar{\sigma}[H(j\omega)] = \|G\|_{\infty} \|H\|_{\infty}
\end{aligned}$$

A utilidade da norma \mathcal{H}_{∞} como índice de desempenho e como ferramenta de análise da robustez de sistemas lineares reside nestas duas propriedades, como foi advertido pioneiramente em [73], e será destacado na seção 1.3.

É ilustrativo considerar o significado da norma \mathcal{H}_{∞} para sistemas monovariáveis. Neste caso, $\|G(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$. A norma \mathcal{H}_{∞} equivale, para sistemas monovariáveis, ao máximo valor de sua resposta em frequência e é estimada facilmente a partir dos diagramas de Bode e de Nyquist.

Cálculo da norma \mathcal{H}_∞ Ao contrário da norma \mathcal{H}_2 não há metodologias analíticas que permitam determinar diretamente a norma \mathcal{H}_∞ . Porém, existem resultados que permitem saber quando a norma é maior que uma dada constante $\gamma > 0$. O teorema seguinte reúne esses resultados.

Teorema 1.1 *Considere o sistema assintoticamente estável dado por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Seja $\gamma > 0$ uma constante dada que não é um valor singular de D . As seguintes afirmativas são equivalentes:*

(a) $\|G(s)\|_\infty < \gamma$

(b) *A matriz hamiltoniana*

$$H = \begin{bmatrix} A + BZ^{-1}D'C & BZ^{-1}B' \\ -\gamma^2 C'T^{-1}C & -(A + BZ^{-1}D'C)' \end{bmatrix}$$

não possui autovalores no eixo imaginário, sendo $Z = \gamma^2 I - D'D$ e $T = \gamma^2 I - DD'$.

(c) *Se o par (A, C) é observável, então existe $P = P' > 0$ tal que:*

$$(A + BZ^{-1}D'C)'P + P(A + BZ^{-1}D'C) + PBZ^{-1}B'P + \gamma^{-2}C'T^{-1}C = 0 \quad (1.8)$$

(d) *Existe $X = X' > 0$ tal que*

$$\begin{bmatrix} A'X + XA & XB & C' \\ B'X & -\gamma I & D' \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.9)$$

Demonstração Vamos mostrar a equivalência entre (a) e (b).

Usando a notação standard,

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

Definimos

$$G(s)^\sim \triangleq G(-s)^t = \left[\begin{array}{c|c} -A' & -C' \\ \hline B' & D' \end{array} \right]$$

Pode ser mostrado que [25]

$$[\gamma^2 I - G(s)^\sim G(s)]^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} A + BZ^{-1}D'C & BZ^{-1}B' & -BZ^{-1} \\ -\gamma^2 C'T^{-1}C & -(A + BZ^{-1}D'C)' & C'DZ^{-1} \\ \hline -Z^{-1}D'C & -Z^{-1}B' & Z^{-1} \end{array} \right]$$

Observe que a matriz de transição de estados desta função é exatamente H . Pode-se verificar que H é uma matriz hamiltoniana cujo espectro é simétrico com relação ao eixo imaginário

(lema A.1). É possível mostrar também que a função $[\gamma^2 I - G(s)^* G(s)]^{-1}$ não possui modos não controláveis ou não observáveis sobre o eixo imaginário. Portanto, (b) é equivalente a

$$[\gamma^2 I - G(j\omega)^* G(j\omega)]^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$$

Neste ponto deve-se demonstrar que

$$\|G(s)\|_\infty < \gamma \iff [\gamma^2 I - G(j\omega)^* G(j\omega)]^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$$

Se $\|G(s)\|_\infty < \gamma$, então $\sup_\omega \lambda_{\max}\{G(j\omega)^* G(j\omega)\} < \gamma$. Portanto, $\gamma^2 I - G(j\omega)^* G(j\omega) > 0 \forall \omega$. Logo a sua inversa existe em todo o eixo imaginário, e $[\gamma^2 I - G(j\omega)^* G(j\omega)]^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$.

De forma reversa, se $[\gamma^2 I - G(j\omega)^* G(j\omega)]^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ vamos mostrar que não pode ser $\|G(s)\|_\infty \geq \gamma$. Se for assim, existe uma frequência ω para a qual $\sigma_{\max}\{G(j\omega)\} = \gamma$. Logo $[\gamma^2 I - G(j\omega)^* G(j\omega)]^{-1}$ tem um pólo no eixo imaginário o que contradiz a hipótese. Fica então demonstrada a equivalência entre (a) e (b).

A equivalência entre (b) e (c) pode ser mostrada utilizando o fato de que H é a matriz hamiltoniana associada à equação de Riccati (1.8) (veja apêndice A).

A equivalência entre (a) e (d) pode ser mostrada aplicando o complemento de Schur (lema B.1) à Desigualdade Matricial Linear (1.9) a qual é equivalente a:

$$\begin{cases} \sigma_{\max}(D) < \gamma \\ A'X + XA + \gamma^{-1}C'C + \gamma(XB + \gamma^{-1}C'D)(\gamma^2 I - D'D)^{-1}(B'X + \gamma^{-1}D'C) < 0 \end{cases}$$

Após alguma manipulação algébrica pode-se ver que a segunda condição é a desigualdade associada à equação de Riccati (1.8). Para uma demonstração completa, veja [25], lemas 5.2 e 5.4. Este resultado, conhecido como o "Bounded Real Lemma" tem uma importância relevante na abordagem LMI do problema \mathcal{H}_∞ [36, 37]. \square

O teorema 1.1 sugere a seguinte maneira de calcular a norma \mathcal{H}_∞ : escolha um número positivo γ , teste se $\|G\|_\infty < \gamma$ por algum dos métodos listados no teorema 1.1, acrescente ou diminua γ de acordo com o resultado obtido e repita a operação.

A norma \mathcal{H}_∞ tem tido um importante papel na teoria de Controle Robusto como índice de desempenho ou na caracterização das incertezas do processo. Com referência à figura 1.1, o Problema Padrão \mathcal{H}_∞ pode ser colocado como

$$\min_{\mathcal{K}} \|T_{zw}(s)\|_\infty = \min_{\mathcal{K}} \max_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (1.10)$$

onde foi usado o fato que \mathcal{H}_∞ é a norma induzida por \mathcal{L}_2 sobre si mesmo. Esta última equação exprime o fato de que o problema padrão \mathcal{H}_∞ minimiza o efeito das perturbações sobre as

saídas no pior caso. Esta característica permite uma abordagem mais realista que a de \mathcal{H}_2 , em geral, quanto ao tratamento das perturbações.

A utilidade da norma \mathcal{H}_∞ na modelagem das incertezas será descrita na seção seguinte.

1.3 Modelagem de Sistemas Incertos

Ao abordar um problema de controle, o projetista tem que trabalhar sobre um modelo matemático do sistema físico envolvido. Este modelo não é outra coisa que uma abstração matemática que pretende captar a essência do comportamento do sistema físico e descrevê-la mediante ferramentas tais como equações diferenciais lineares ou equações à diferenças.

Mesmo naqueles casos em que o sistema físico é bem conhecido (em alguns sistemas eletromecânicos, por exemplo), o processo de modelagem envolve hipóteses simplificadoras e efeitos de segunda ordem negligenciados. Além disso, às vezes o modelo matemático não é linear ou envolve equações diferenciais em derivativas parciais. Em tais casos, é necessária outra fase de simplificação do modelo até poder descrevê-lo mediante um sistema de equações diferenciais lineares de ordem finita. A razão disto é que para este tipo de sistemas a Teoria de Controle apresenta resultados mais potentes. Naqueles casos em que o sistema físico é muito complexo ou desconhecido podem ser empregadas técnicas de identificação que visam obter um modelo aproximado suficientemente simples.

Em qualquer caso, o modelo obtido não representará fielmente o sistema físico, o que pode levar a um desempenho pobre, ou mesmo à instabilidade, quando essa inexatidão não for considerada adequadamente. É necessário, então, que o processo físico não seja mais representado por um modelo, mas por uma família de modelos que represente o comportamento incerto da planta. Este aspecto da modelagem, conhecido genericamente por incerteza, não foi incluído explicitamente na Teoria de Controle até finais dos anos 70.

Dependendo de como for feita a modelagem e da origem da incerteza, esta pode apresentar diversas características. Se a modelagem for feita através de um algoritmo de identificação que permite estimar um conjunto de parâmetros do modelo a partir de dados experimentais, a incerteza vai estar associada a esse conjunto de parâmetros. O conjunto de modelos vai estar descrito pelas faixas de variação dos coeficientes do modelo estimado. Neste caso estamos frente a uma *incerteza paramétrica* a qual pode ser descrita inteiramente mediante um conjunto finito de parâmetros.

Contraposta a essa última, a *incerteza dinâmica* é aquela em que se desconhece a ordem do sistema e que não pode ser associada a nenhum conjunto finito de parâmetros incertos.

Geralmente este tipo de incertezas são oriundas de dinâmicas negligenciadas na modelagem, e são, portanto, muito comuns na prática.

Um sistema de controle geralmente está composto de vários subsistemas que podem ser modelados separadamente. Assim pode ser obtido um modelo para os atuadores, outro para a planta, sensores, etc.. É razoável também modelar as incertezas inerentes a cada parte separadamente. Como consequência, a incerteza do sistema total vai ter uma dada estrutura que é conveniente incluir na análise. Neste caso fala-se de *incerteza estruturada*.

No caso em que, dada a simplicidade do sistema, seja conveniente modelar a incerteza como sendo global a toda a planta, esta será dita *não estruturada*.

Existem muitas formas, de diversos graus de generalidade, de descrever os diferentes tipos de incertezas. A seguir vamos introduzir uma descrição apropriada a um tipo de incertezas dinâmicas não estruturadas. Esta descrição, além de ser importante em si mesma, nos permitirá introduzir na seção 1.3.2 a forma canônica de incerteza em que baseia-se o resto do trabalho.

1.3.1 Modelo Multiplicativo da Incerteza Dinâmica

A descrição de incerteza que veremos a seguir se aplica em casos em que se desconhece a ordem das equações diferenciais que modelam o sistema sob estudo. Este é o caso quando existem fenômenos físicos complexos ou mal conhecidos que não podem ser incluídos no modelo da planta. O caso de sistemas com dinâmica infinita, tais como retardos de tempo ou sistemas flexíveis, também pode ser aproximado mediante este tipo de modelo, adotando uma representação de ordem finita para o modelo nominal e considerando a dinâmica restante como incerteza.

A família de modelos está descrita da seguinte maneira [31]:

$$\mathcal{G}(s) = G(s)[I + W(s)\Delta(s)] \quad \|\Delta(s)\|_{\infty} < 1 \quad (1.11)$$

O modelo nominal, $G(s)$, é uma primeira aproximação ao comportamento do sistema e será o modelo utilizado para o projeto do controlador. Supõe-se que a incerteza, representada pelo termo desconhecido $\Delta(s)$, reside na entrada do sistema. $\Delta(s)$ representa uma transferência estável e própria que é suposta limitada em norma pela unidade sem perda de generalidade. A função $W(s)$ pondera as frequências e os canais onde a incerteza é mais relevante. Na figura 1.2 é representada em um diagrama de blocos a relação entre os diferentes componentes do modelo. O modelo (1.11) descreve o conjunto de plantas como aquelas que em cada frequência ω pertencem a um disco com centro na resposta do modelo nominal e raio $|G(j\omega)W(j\omega)|$.

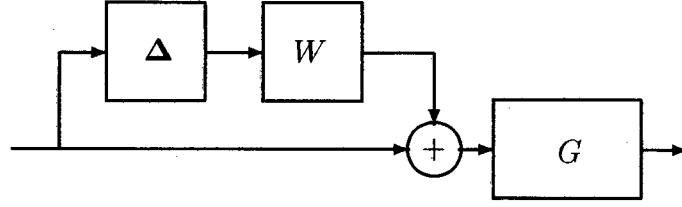


Figura 1.2: *Modelo Multiplicativo de Incerteza Dinâmica*

No caso de sistemas monovariáveis:

$$\frac{\mathcal{G}(s)}{G(s)} - 1 = W(s)\Delta(s) \quad \|\Delta(s)\|_{\infty} < 1$$

e por tanto:

$$|W(j\omega)| \geq \left| \frac{\mathcal{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - 1 \right|, \quad \forall \omega \quad (1.12)$$

A relação (1.12) sugere como escolher $W(s)$ quando é possível estimar um limite superior do segundo membro. Isto será ilustrado mediante um exemplo.

Exemplo [31]:

Vamos supor que a planta pode ser descrita, em uma primeira aproximação por uma transferência do tipo

$$p(s) = \frac{1}{s^2}$$

que pode representar um motor de corrente contínua onde tem-se negligenciado os efeitos do atrito. Uma aproximação mais fina inclui os efeitos de um retardo, mas de grandeza não precisamente conhecida. Então

$$p(s) = \frac{e^{-s\tau}}{s^2}, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (1.13)$$

Este sistema, além de ser incerto, contém uma dinâmica de ordem infinita. Vamos representar este sistema incerto mediante o modelo da equação (1.11) onde escolhemos a planta nominal como

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

A função $W(s)$ será escolhida para que o modelo possa representar todas as plantas dadas por (1.13). Para isso, aplicamos a relação (1.12) :

$$|W(j\omega)| \geq |e^{-j\omega\tau} - 1| \quad \forall \omega, \tau, 0 \leq \tau \leq 1$$

Pode-se verificar mediante um diagrama de Bode que

$$W(s) = \frac{0.21}{0.1s + 1}$$

é uma escolha adequada. □

A melhor escolha de $W(s)$ deve atender os critérios seguintes:

- i) não introduzir muita conservatividade na majoração (1.12)
- ii) possuir baixa ordem.

Além da descrição multiplicativa, as incertezas dinâmicas podem ser representadas mediante outros modelos. A seguir são listados alguns destes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(s) &= G(s) + W(s)\Delta(s) \\
 \mathcal{G}(s) &= G(s)[I + W(s)\Delta(s)]^{-1} \\
 \mathcal{G}(s) &= G(s)[I + W(s)\Delta(s)G(s)]^{-1}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

É necessário adotar um modelo suficientemente geral de incerteza, com o objetivo de incluir diversos casos de interesse de uma maneira unificada, e de abordar o importante aspecto da estrutura da incerteza. Esse é o tema da seção seguinte.

1.3.2 Formulação Canônica

Vamos introduzir uma formulação onde a incerteza entra no sistema mediante uma relação funcional conhecida por LFT, **Transformação Fracionária Linear**. Definições, principais propriedades, e notação envolvendo LFTs podem ser encontradas no apêndice D. Na formulação LFT o modelo incerto é representado como indicado na figura 1.3 onde $\Delta(s)$ representa a incerteza, e $M(s)$ será chamado de *modelo nominal*.

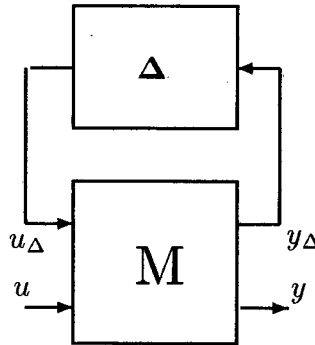


Figura 1.3: *Formulação Canônica*

$M(s)$ é a *matriz de coeficientes* da LFT, e pode ser particionada conforme às dimensões dos vetores u , u_Δ , y e y_Δ , da forma seguinte:

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix}$$

O **modelo de incerteza não estruturada** será descrito pela matriz de transferência de u para y da seguinte forma:

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{F}_u[M(s), \Delta(s)] = M_{22} + M_{21}\Delta[I - M_{11}\Delta]^{-1}M_{12} \quad \|\Delta(s)\|_\infty < 1 \quad (1.15)$$

A seguir são destacados os principais fatos que fazem da formulação LFT uma ferramenta muito poderosa na modelagem de sistemas incertos.

Representação de incertezas dinâmicas A formulação multiplicativa da figura 1.2 pode ser representada alternativamente pelo esquema da figura 1.3, onde $M(s)$, representa a interconexão dos blocos conhecidos da figura 1.2. Com um particionamento compatível com as dimensões dos vetores correspondentes:

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ G(s)W(s) & G(s) \end{bmatrix}$$

Pode-se também verificar que a formulação LFT é suficientemente geral para incluir aqueles outros modelos listados em (1.14).

Representação de incertezas paramétricas Considere o sistema incerto descrito no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(A + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i \right) x(t) + \left(B + \sum_{i=1}^k \delta_i B_i \right) u(t) \\ y(t) &= \left(C + \sum_{i=1}^k \delta_i C_i \right) x(t) + \left(D + \sum_{i=1}^k \delta_i D_i \right) u(t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde a incerteza reside nos parâmetros δ_i , $i = 1..k$, os quais afetam a dinâmica do sistema de uma maneira afim. Estes são supostos reais, invariantes no tempo, e limitados em módulo $|\delta_i| < 1$. O sistema nominal é dado pelas matrizes A, B, C, D , enquanto que as matrizes A_i, B_i, C_i, D_i representam a estrutura da incerteza, já que determinam a maneira como os parâmetros incertos afetam o sistema. Existem modelos ainda mais gerais de incerteza paramétrica, onde as matrizes da representação de estados pertencem a um conjunto fechado convexo [40]. Porém, eles não serão considerados neste trabalho.

O modelo (1.16) é comumente achado na prática como resultado de um processo de identificação [10, 51].

O modelo (1.16) pode ser representado [32] mediante a LFT da figura 1.3 onde o bloco de incerteza tem agora, uma estrutura particular dada por

$$\Delta = \text{diag}\{\delta_1 I, \delta_2 I, \dots, \delta_k I\}$$

Representação de incertezas estruturadas Se um sistema de controle é composto de diversos componentes incertos, cada um deles modelados como uma LFT, é possível compô-los conjuntamente em uma única LFT e uma incerteza global estruturada. Este fato é consequência imediata de que a interconexão linear de LFT's é uma LFT, e é ilustrado na figura 1.4.

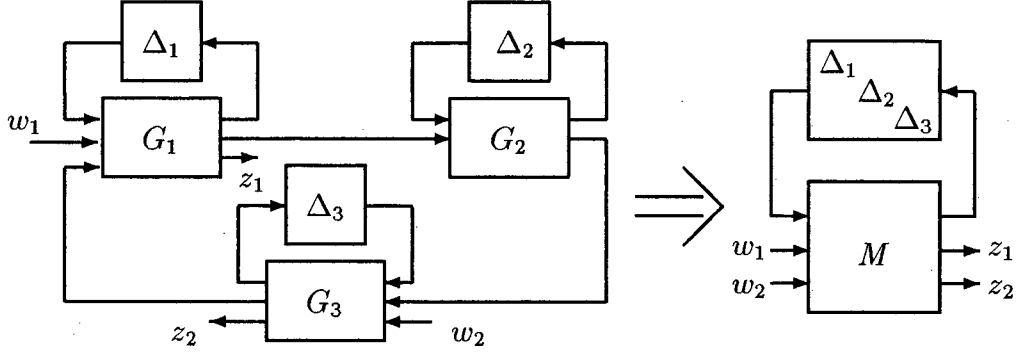


Figura 1.4: *Interconexão de componentes incertos*

Note como a incerteza geral a nível de componente vira incerteza estruturada a nível de sistema.

Estamos em condições, agora, de formular o **modelo de incerteza estruturada**.

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{F}_u[M(s), \Delta(s)], \quad \Delta(s) \in \Delta$$

$$\Delta = \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F) :$$

$$\delta_i(s) \in \mathcal{C}, \|\delta_i\|_\infty < 1, \Delta_j(s) \in \mathcal{C}^{m_j \times m_j}, \|\Delta_j\|_\infty < 1 \} \quad (1.17)$$

Embora seja possível incorporar em Δ blocos do tipo $\delta_k^r I, \delta_k^r \in \mathbb{R}$ representando incertezas paramétricas, a sua inclusão complica a notação e o cálculo, e por isso foram excluídos do modelo.

A estrutura de Δ inclui blocos do tipo $\delta_i I$ que representam incertezas dinâmicas escalares que afetam simultaneamente vários pontos do sistema. Referiremo-nos a eles como blocos de escalares repetidos. O outro tipo de blocos considerado, Δ_j , representa incertezas dinâmicas a nível de componente e serão referidos como blocos de matrizes cheias. Cada bloco é normalizado sem perda de generalidade já que, devido à linearidade, os fatores de escala podem ser incluídos na matriz de coeficientes $M(s)$.

1.4 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os fundamentos matemáticos que nos permitirão abordar o estudo das ferramentas de análise da Teoria de Controle Robusto, objeto de nosso

interesse.

O conceito de norma de sinais e de sistemas é fundamental para a caracterização das perturbações externas assim como para a formulação de critérios de desempenho com um significado físico preciso. Foram apresentadas as normas em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , e discutidas as suas diferenças em relação a seu significado e utilização na Teoria de Controle.

Foi discutida a importante questão da incerteza como fator preponderante na modelagem de sistemas físicos, e introduzida a descrição canônica que justifica o desenvolvimento do corpo teórico apresentado nos capítulos seguintes.

É importante notar como, a partir da formulação de seus elementos básicos, a Teoria de Controle Robusto aporta novos conceitos e uma crítica da Teoria de Controle Moderna. Foi substituído o modelo perfeitamente conhecido, hipótese de muitos problemas abordados pela Teoria Moderna, pelo modelo do sistema incerto. Foram incorporados elementos de incerteza e pessimismo em relação à descrição das perturbações externas. Esses aportes possibilitam a abordagem de problemas de controle mais complexos nos quais a incerteza tem um papel primordial sobre o comportamento do sistema.

Capítulo 2

Análise de Sistemas Incertos

2.1 Introdução

O objetivo da análise tratada neste capítulo, consiste em verificar a validade de certas propriedades de interesse, tanto para o sistema nominal quanto para o sistema incerto representado na figura 2.1. O mesmo está descrito na forma canônica definida na seção 1.3.

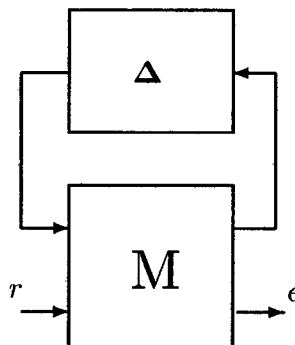


Figura 2.1: *Modelo de Sistema Incerto*

A saída e representa o erro de seguimento que se deseja manter o menor possível frente ao conjunto de perturbações externas e sinais de referência contidas em r .

O sistema nominal $M(s)$ é assumido assintoticamente estável. A incerteza Δ será suposta sem estrutura na seção 2.3 e o sistema incerto estará descrito pelo modelo (1.15). Na seção 2.4 são analisados sistemas com incerteza estruturada, e o modelo adotado será aquele de (1.17).

As propriedades de nosso interesse são o Desempenho Nominal, a Estabilidade Robusta e o Desempenho Robusto para ambos tipos de incerteza.

2.2 Desempenho Nominal

Vamos definir a *bola unitária* em \mathcal{L}_2 :

$$B\mathcal{L}_2 = \{v \in \mathcal{L}_2 \mid \|v\|_2 < 1\}$$

Nossa condição de desempenho consiste em garantir um bom seguimento frente a qualquer entrada limitada unitariamente:

$$e \in B\mathcal{L}_2 \quad \forall r \in B\mathcal{L}_2$$

A linearidade do sistema nos permite escalonar o problema dessa forma, já que qualquer outro limite pode ser incorporado à estrutura de interconexão sem perda de generalidade. De forma análoga, qualquer função de ponderação pode ser incorporada à estrutura M .

Lema 2.1 *É condição necessária e suficiente para assegurar o desempenho nominal que seja satisfeita a seguinte relação:*

$$\|M_{22}(s)\|_\infty \leq 1 \tag{2.1}$$

O lema é uma simples aplicação do fato de que a norma induzida de uma aplicação linear do espaço \mathcal{L}_2 sobre si mesmo é a norma $\|\cdot\|_\infty$, como mostrado na seção 1.2.2. Além disso, no caso nominal a transferência resulta $e(s) = M_{22}(s)r(s)$.

2.3 Análise de Sistemas com Incerteza não Estruturada

Nesta seção o sistema incerto da figura 2.1 está sujeito a incertezas não estruturadas, modeladas conforme à descrição (1.15). Ou seja, a incerteza é suposta ser um sistema dinâmico $\Delta(s)$ estável que satisfaz

$$\|\Delta\|_\infty < 1$$

2.3.1 Estabilidade Robusta

O problema de nosso interesse aqui é obter condições que assegurem a estabilidade do sistema para todo elemento do conjunto incerto. Essas condições estão expressas no teorema a seguir.

Teorema 2.1 *O sistema incerto (1.15) é robustamente estável se e somente se*

$$\|M_{11}(s)\|_\infty \leq 1 \tag{2.2}$$

Demonstração:

A transferência entre e e r é dada por

$$\mathcal{F}_u[M(s), \Delta(s)] = M_{22} + M_{21}\Delta[I - M_{11}\Delta]^{-1}M_{12}$$

Dada a estabilidade nominal e as hipóteses sobre Δ , os termos $M_{ij}(s)$ e Δ representam transferências estáveis. Portanto a estabilidade do sistema está comprometida unicamente pelo termo $[I - M_{11}\Delta]^{-1}$. A estabilidade robusta é equivalente, então a

$$\det[I - M_{11}(s)\Delta(s)] \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{C}_+, \quad \Delta : \|\Delta\|_\infty < 1$$

Suficiência:

Por propriedades dos valores singulares:

$$\underline{\sigma}[I - M_{11}(s)\Delta(s)] \geq 1 - \bar{\sigma}[M_{11}(s)\Delta(s)] \geq 1 - \sup_{s \in \mathcal{C}_+} \bar{\sigma}[M_{11}(s)\Delta(s)] \quad \forall s \in \mathcal{C}_+ \quad (2.3)$$

Usando (1.7) e a propriedade submultiplicativa de $\|\cdot\|_\infty$:

$$1 - \sup_{s \in \mathcal{C}_+} \bar{\sigma}[M_{11}(s)\Delta(s)] = 1 - \|M_{11}\Delta\|_\infty \geq 1 - \|M_{11}\|_\infty \|\Delta\|_\infty > 1 - \|M_{11}\|_\infty \quad (2.4)$$

Portanto, das equações (2.3) e (2.4):

$$\underline{\sigma}[I - M_{11}(s)\Delta(s)] > 0 \quad \forall s \in \mathcal{C}_+$$

Então, $\det[I - M_{11}(s)\Delta(s)] \neq 0$ no semiplano direito, e portanto, a estabilidade robusta do sistema está assegurada.

Necessidade:

Vamos supor que $\bar{\sigma}[M_{11}(s_0)] > 1$ para algum $s_0 \in \mathcal{C}_+$. Consideremos um membro $\Delta_0(s)$ do conjunto incerto, escolhido de tal forma que

$$\Delta_0(s_0) = \alpha V U^*, \quad \alpha = 1/\bar{\sigma}[M_{11}(s_0)] < 1$$

sendo V e U as matrizes unitárias da decomposição em valores singulares $M_{11}(s_0) = U \Sigma V^*$.

Portanto:

$$\begin{aligned} \det[I - M_{11}(s_0)\Delta_0(s_0)] &= \det[I - \alpha U \Sigma U^*] \\ &= \det[I - \alpha \Sigma] = \prod_{i=1}^r (1 - \sigma_i/\bar{\sigma}) = 0 \end{aligned}$$

Portanto a condição $\|M_{11}\|_\infty < 1$ é necessária para a estabilidade robusta. \square

Cabe destacar a importância da propriedade submultiplicativa da norma \mathcal{H}_∞ na dedução do resultado anterior, o qual é fundamental no estudo da robustez de sistemas lineares.

O teorema 2.1 constitui uma aplicação do teorema apresentado a seguir, o qual foi proposto originalmente para um tipo mais geral de sistemas, que inclui sistemas não lineares [74].

Teorema 2.2 (Teorema do Pequeno Ganho) *No sistema realimentado da figura 2.2, se $G(s)$ e Δ são sistemas estáveis e $\|\Delta\|_\infty < 1$, então, é condição suficiente para a estabilidade do sistema interconectado que :*

$$\|G(s)\|_\infty \leq 1$$

Se $\Delta(s)$ representa um bloco incerto que pode assumir qualquer valor tal que $\|\Delta\|_\infty < 1$, a condição é também necessária, sendo a demonstração análoga à do teorema 2.1.

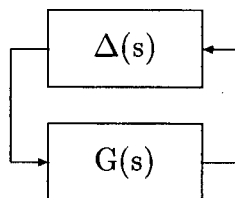


Figura 2.2: Teorema do Pequeno Ganho

2.3.2 Desempenho Robusto

O sistema incerto (1.15) terá Desempenho Robusto se satisfizer:

$$e \in B\mathcal{L}_2 \quad \forall r \in B\mathcal{L}_2 \text{ e } \forall \Delta(s) \mid \|\Delta\|_\infty < 1 \quad (2.5)$$

A condição de desempenho robusto consiste, então, em garantir um bom seguimento frente a qualquer entrada limitada unitariamente para qualquer elemento da família de modelos que descreve a planta incerta.

A condição de desempenho robusto é mais forte que as de desempenho nominal e estabilidade robusta, já que essas últimas são necessárias para garantir aquela, mas não suficientes.

A condição (2.5) é equivalente a:

$$\|\mathcal{F}_u[M(s), \Delta(s)]\|_\infty = \|M_{22} + M_{21}\Delta[I - M_{11}\Delta]^{-1}M_{12}\|_\infty \leq 1 \quad \forall \Delta(s) \mid \|\Delta\|_\infty < 1 \quad (2.6)$$

Este é um problema substancialmente mais complexo que os já tratados pois, como será mostrado na seção 2.4.3, apresenta uma estrutura dada pela incerteza e pela condição de desempenho. A ferramenta de análise adequada ao caso é o valor singular estruturado, μ , que será introduzida na seção 2.4.

Portanto, o problema de desempenho robusto não pode ser expresso mediante a norma \mathcal{H}_∞ sem um certo grau de conservatividade. Porém, essa norma cumpre um papel importante no cálculo do valor singular estruturado.

2.4 Análise de Sistemas com Incerteza Estruturada

Os sistemas sob estudo nesta seção são representados no diagrama da figura 2.1, onde M é o sistema nominal suposto estável, e Δ um sistema dinâmico incerto com uma estrutura dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(s) &= \mathcal{F}_u[M(s), \Delta(s)], \quad \Delta(s) \in \mathbf{\Delta} \\ \mathbf{\Delta} &= \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F) : \\ \delta_i(s) &\in \mathcal{C}, \|\delta_i\|_\infty < 1, \Delta_j(s) \in \mathcal{C}^{m_j \times m_j}, \|\Delta_j\|_\infty < 1 \}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Essa estrutura é consequência da existência de incertezas a nível de componentes, e de certos parâmetros dinâmicos incertos que agem em diferentes pontos do sistema simultaneamente.

Embora possam ser usadas as técnicas introduzidas na seção anterior, os resultados da sua aplicação seriam muito conservativos pois, ao ignorar a estrutura da incerteza, estão-se incluindo outros modelos à família (2.7) e, portanto, abordando o problema de uma maneira muito pessimista. São necessárias outras ferramentas matemáticas, além da norma \mathcal{H}_∞ para abordar o problema de análise em questão.

Do ponto de vista físico, o modelo de incerteza é aquele da equação (2.7), onde cada bloco da estrutura é um sistema dinâmico incerto. Mas, para fins de análise é equivalente supor que esses blocos incertos são matrizes ou escalares complexos desconhecidos que podem assumir quaisquer valores dentro de uma dada região.

Para isso vamos definir os conjuntos

$$\mathbf{\Delta} = \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F) : \delta_i \in \mathcal{C}, \Delta_j \in \mathcal{C}^{m_j \times m_j} \} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{B\Delta} = \{ \Delta \in \mathbf{\Delta} : |\delta_i| < 1, \bar{\sigma}(\Delta_j) < 1 \} \quad (2.9)$$

A incerteza é suposta ser quadrada para simplificar a notação, sendo $\mathbf{\Delta} \subset \mathcal{C}^{m \times m}$, onde definimos $m \triangleq \sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j$. Os inteiros positivos S e F representam o número total de blocos de escalares repetidos e de matrizes cheias, respectivamente.

Vamos reformular nosso modelo de incerteza estruturada como:

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{F}_u[M(s), \Delta], \quad \Delta \in \mathbf{B\Delta} \quad (2.10)$$

2.4.1 Estabilidade Robusta

Consideremos o sistema incerto da figura 2.1, onde a transferência de e para r é dada por (2.10). Assumindo a estabilidade do sistema nominal $M(s)$, vamos estudar sob quais condições é possível assegurar a estabilidade do sistema para qualquer $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$. De forma análoga ao caso não estruturado, a estabilidade robusta é equivalente a:

$$\det[I - M_{11}(s)\Delta] \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{C}_+, \quad \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta \quad (2.11)$$

Devido à hipótese de estabilidade nominal, $\det[I - M_{11}\Delta]$ é uma função analítica em \mathcal{C}_+ . Por argumentos de continuidade das raízes de $\det[I - M_{11}\Delta]$ em relação a Δ , a condição (2.11) é equivalente a:

$$\det[I - M_{11}(j\omega)\Delta] \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta \quad (2.12)$$

Para abordar este problema vamos definir

Definição 2.1 (Valor Singular Estruturado, [28]) Dados $M \in \mathcal{C}^{m \times m}$ e a estrutura Δ definida em (2.8) definimos o valor singular estruturado como:

$$\mu_{\Delta}(M) = \begin{cases} 0 & \text{se } \det[I + M\Delta] \neq 0 \quad \forall \Delta \in \Delta \\ \frac{1}{\min_{\Delta \in \Delta} \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det[I + M\Delta] = 0\}} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.13)$$

Da definição fica claro a dependência de μ com relação à estrutura Δ , porém vamos omitir o subíndice Δ pois sempre vai ficar claro no contexto a estrutura Δ à que está referido $\mu(M)$.

Da definição de μ deduz-se que (2.12) é equivalente a

$$\mu[M_{11}(j\omega)] \leq 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

e, portanto, podemos formular a seguinte condição de estabilidade robusta:

Teorema 2.3 (Estabilidade Robusta) A estabilidade robusta do sistema (2.10) é satisfeita se e somente se¹:

$$\|M_{11}\|_{\mu} \triangleq \sup_{\omega} \mu[M_{11}(j\omega)] \leq 1$$

¹ $\|\cdot\|_{\mu}$ configura um abuso de notação já que essa função não é realmente uma norma.

Embora a definição (2.13) seja algo complexa à primeira vista, o conceito subjacente é aquele clássico de margem de estabilidade como será mostrado a seguir.

Em geral, dado um conjunto Δ de perturbações ou variações no comportamento do sistema, pode-se definir a **Margem de Estabilidade**² $k_m(j\omega)$ frente a esse conjunto Δ como a norma da menor perturbação que em cada frequência ω desestabiliza o sistema:

$$k_m(j\omega) \triangleq \min_{\Delta \in \Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det[I + M(j\omega)\Delta] = 0 \}$$

Vamos ver o significado de k_m naqueles casos em que o conceito clássico de margem de estabilidade pode nos auxiliar na sua compreensão.

Da teoria clássica de controle, estamos familiarizados com os conceitos de margens de ganho e de fase para sistemas monovariáveis. O primeiro resulta de considerar um conjunto de incertezas $\Delta = \mathbb{R}_+$ de tal forma que a estabilidade do sistema em malha fechada está determinada pelas raízes de $1 + m(s)\Delta$. A margem de estabilidade é, neste caso: $k_m = |m(j\omega_0)|^{-1}$ onde ω_0 é a frequência de em que $m(j\omega)$ é real e de módulo máximo. A perturbação $\Delta = k_m$ desestabiliza o sistema.

O caso de sistemas multivariáveis sujeitos a incertezas não estruturadas foi abordado na seção 2.3. A estabilidade está relacionada neste caso com os zeros da função $\det[I + M\Delta]$ e a margem de estabilidade é dada por

$$k_m(j\omega) = \min_{\Delta \in \Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det[I + M(j\omega)\Delta] = 0 \} = \bar{\sigma}[M(j\omega)]^{-1}$$

como pode ser mostrado por argumentos similares aos usados na demonstração do teorema 2.1. A estabilidade está assegurada para toda perturbação Δ tal que

$$\bar{\sigma}[\Delta] < \min_{\omega} k_m(j\omega) = \|M\|_{\infty}^{-1}$$

resultado equivalente ao teorema do pequeno ganho.

No caso trivial em que nenhuma perturbação desestabiliza o sistema podemos definir $k_m(j\omega) = \infty$. Portanto, resulta claro que

$$\mu[M(j\omega)] = k_m(j\omega)^{-1}$$

Para cada frequência, $\mu[M(j\omega)]$ representa a inversa da margem de estabilidade. Portanto, μ representa em algum sentido, o "tamanho" do sistema frente a perturbações estruturadas e o teorema 2.3 pode ser visto como a generalização do teorema do pequeno ganho no caso de incerteza estruturada.

²Embora não esteja formulada formalmente, nossa definição de $k_m(j\omega)$ segue aquela de [61].

A definição (2.13) não é útil para se calcular μ . Este não é um problema simples mas podem ser obtidos limites superiores e inferiores para μ , como veremos a seguir.

2.4.2 Cálculo e Propriedades de μ

As seguintes propriedades podem ser demonstradas a partir da definição (2.13). A estrutura associada é aquela definida em (2.8) exceto naqueles casos em que se explicita outra estrutura particular.

1. $\mu(\alpha M) = |\alpha|\mu(M) \quad \forall M \in \mathcal{C}^{m \times m}$.
2. $\mu(I) = 1$
3. $\mu(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\mu(B)$
4. Para $\Delta = \mathcal{C}^{m \times m}$, $\mu(M) = \bar{\sigma}(M)$, $\forall M \in \mathcal{C}^{m \times m}$.

Demonstração:

Se $\mu = 0$, então $\det[I + M\Delta] \neq 0 \quad \forall \Delta \in \mathcal{C}^{m \times m} \implies \bar{\sigma}(M\Delta) < 1 \implies \bar{\sigma}(M) = 0$. Se $\mu \neq 0$: $\mu^{-1} = k_m = \min\{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det[I + M\Delta] = 0\}$.

Para todo Δ tal que $\bar{\sigma}(\Delta) < \bar{\sigma}(M)^{-1}$ tem-se

$$\det[I + M\Delta] \neq 0$$

já que $\bar{\sigma}(M\Delta) \leq \bar{\sigma}(M)\bar{\sigma}(\Delta) < 1$.

Neste ponto alcança com tomar $\Delta_0 = \bar{\sigma}(M)^{-1}VU^*$ sendo $M = U\Sigma V^*$ a decomposição em valores singulares de M . É fácil ver que $\det[I + M\Delta_0] = 0$. Portanto, $\mu = \bar{\sigma}(M)$. \square

5. Para $\Delta = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathcal{C}\}$, $\mu(M) = \rho(M)$.

Demonstração:

Se $\mu = 0$, então $\det[I + M\Delta] \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{C}$. Portanto

$$\bar{\sigma}(\lambda M) < 1 \quad \forall \lambda \implies M = 0 \implies \rho(M) = 0$$

Se $\mu \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mu^{-1} &= \min\{|\lambda| \mid \det[I + \lambda M] = 0\} = \min\{|\lambda| \mid \det[\lambda^{-1}I + M] = 0\} = \\ &= \min\{|\beta^{-1}| \mid \det[\beta I + M] = 0\} = (\max\{|\beta| \mid \det[\beta I + M] = 0\})^{-1} = \rho(M)^{-1} \end{aligned}$$

$$6. \rho(M) \leq \mu(M) \leq \bar{\sigma}(M).$$

Demonstração:

A estrutura Δ de (2.8) fornece: $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathcal{C}\} \subset \Delta \subset \mathcal{C}^{m \times m}$.

Portanto:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda I} \{|\lambda| \mid \det[I + \lambda M] = 0\} &\geq \min_{\Delta} \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det[I + M\Delta] = 0\} \geq \\ &\geq \min_{\mathcal{C}^{m \times m}} \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det[I + M\Delta] = 0\} \end{aligned}$$

$$\text{Então : } \mu_{\lambda I}^{-1} \geq \mu_{\Delta}^{-1} \geq \mu_{\mathcal{C}^{m \times m}}^{-1}.$$

Pelas propriedades (4) e (5): $\rho(M) \leq \mu(M) \leq \bar{\sigma}(M)$. □

É conveniente se deter neste ponto para comentar o significado destas propriedades. As relações (1)-(3) estão vinculadas às propriedades geométricas da função $\mu(M)$. A mesma não constitui uma norma pois não satisfaz a desigualdade triangular e $\mu(M) = 0 \not\Rightarrow M = 0$.

A propriedade (4) mostra que μ reduz-se ao máximo valor singular no caso de perturbações não estruturadas. Neste caso particular $\mu(M) = \bar{\sigma}(M)$ é uma norma no espaço de matrizes constantes e $\|M(s)\|_{\mu} \triangleq \sup_{\omega} \bar{\sigma}(M(j\omega)) = \|M\|_{\infty}$ é a norma \mathcal{H}_{∞} no espaço de sistemas.

Para fixar conceitos e ver estes pontos vamos considerar um exemplo o suficientemente simples que permita calcular μ diretamente a partir de sua definição.

Exemplo:

Seja a estrutura

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}, \delta_i \in \mathcal{C} \right\}$$

Para o caso

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

resulta $\rho(M) = 0$ e $\bar{\sigma}(M) = 1$. Segundo a propriedade (6) $0 \leq \mu \leq 1$, relação que não é útil para estimar μ . Este pode ser calculado diretamente a partir de sua definição:

$$\det[I + M\Delta] = 1 + \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2) = 0$$

$$\Rightarrow (\delta_1 - \delta_2) = 2$$

Portanto $\mu(M)^{-1} = \min_{\delta_i \in \mathcal{C}} \{\max_i(|\delta_i|) \mid (\delta_1 - \delta_2) = 2\} = 1 \Rightarrow \mu(M) = 1$, sendo que a perturbação Δ_0 de mínima norma tal que $\det[I + M\Delta_0] = 0$ é

$$\delta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A propriedade (5) em conjunção com a (4) permite deduzir limites superiores e inferiores para μ , como indicado no item (6). Porém, esses limites não são úteis ao se calcular μ pois, em geral, não são próximos. É simples construir exemplos nos quais estes limites estão arbitrariamente distantes.

Associados à estrutura (2.8) vamos definir os seguintes conjuntos³

$$\mathcal{U} \triangleq \{ U = \text{diag}(U_{r_1}, \dots, U_{r_S}, U_1, \dots, U_F) :$$

$$U_{r_i} \text{ unitária } \in \mathcal{C}^{r_i \times r_i}, i = 1, \dots, S; U_j \text{ unitária } \in \mathcal{C}^{m_j \times m_j}, j = 1, \dots, F \} \quad (2.14)$$

$$\mathcal{D} \triangleq \{ D = \text{diag}(D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_F I_{m_F}) :$$

$$D_i \in \mathcal{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0; i = 1, \dots, S; d_j \in \mathcal{C}, j = 1, \dots, F \} \quad (2.15)$$

Estes conjuntos denominam-se invariantes e serão utilizados no cálculo de μ . As propriedades seguintes podem ser derivadas à partir das definições e expressam o sentido no qual estes conjuntos são invariantes.

7. $U\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ e $\Delta U \in \mathbf{B}\Delta \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta, U \in \mathcal{U}$.
8. $D\Delta D^{-1} = \Delta, \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta, D \in \mathcal{D}$.
9. $\mu(MU) = \mu(UM) = \mu(M), \forall U \in \mathcal{U}, M \in \mathcal{C}^{m \times m}$.
10. $\mu(DMD^{-1}) = \mu(M) \forall D \in \mathcal{D}, M \in \mathcal{C}^{m \times m}$.

As propriedades (7)-(10) são consequência de que os produtos $\Delta U, U\Delta$ e $D\Delta D^{-1}$ não modificam a norma nem a estrutura da matriz Δ . Para demonstrar as propriedades (9) e (10) basta considerar as identidades

$$\det[I + M\Delta] = \det[I + (MU)U^*\Delta] \forall U \in \mathcal{U}$$

$$\det[I + M\Delta] = \det[I + DM\Delta D^{-1}] = \det[I + (DMD^{-1})D\Delta D^{-1}]$$

e aplicar as propriedades (7) e (8).

Por último, vamos apresentar um resultado que permite calcular limites mais próximos para μ .

³Uma matriz $U \in \mathcal{C}^{m \times m}$ é unitária se e somente se $U^*U = I$.

11. Para toda matriz $M \in \mathcal{C}^{m \times m}$:

$$\max_{U \in \mathcal{U}} \mu(UM) \leq \mu(M) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DM D^{-1}) \quad (2.16)$$

Demonstração:

Pelas propriedades (6), (9) e (10):

$$\rho(UM) \leq \mu(UM) = \mu(M) = \mu(DMD^{-1}) \leq \bar{\sigma}(DM D^{-1})$$

$$\forall U \in \mathcal{U}, D \in \mathcal{D}, M \in \mathcal{C}^{m \times m}$$

Portanto a propriedade fica demonstrada tomando o máximo em \mathcal{U} e o mínimo em \mathcal{D} . \square

O limites da equação (2.16) podem ser ainda melhorados, como o estabelecem os seguintes teoremas [28].

Teorema 2.4

$$\max_{U \in \mathcal{U}} \rho(UM) = \mu(M)$$

Teorema 2.5 Para aquelas estruturas Δ tais que $2S + F \leq 3$:

$$\min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DM D^{-1}) = \mu(M)$$

Embora o teorema 2.4 seja válido para qualquer estrutura da forma (2.8), ele não permite por si mesmo calcular eficientemente μ já que o problema de otimização envolvido não é convexo.

Vamos definir o que alguns autores chamam de *pseudo valor singular estruturado* :

$$\bar{\mu}(M) \triangleq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DM D^{-1}) \quad (2.17)$$

As matrizes $D \in \mathcal{D}$ são referidas correntemente na literatura como matrizes de "scaling", denominação que usaremos na seqüência. O cálculo de $\bar{\mu}$ pode ser resolvido eficientemente mediante algoritmos standard de otimização, dada a convexidade do problema [28]. Alternativamente, pode ser formulado como a minimização de um objetivo linear sujeito a uma restrição LMI [54] .

A importância de $\bar{\mu}$ advém de dois fatos. O primeiro deles é que, pelo teorema 2.5, $\bar{\mu} = \mu$ para problemas com poucos blocos de incerteza ($2S + F \leq 3$). Em segundo lugar, para aquelas estruturas mais complexas onde $\bar{\mu} \geq \mu$, existe certa evidência computacional de que a diferença entre eles é menor que 15% [28].

Como consequência imediata do teorema 2.3 e da propriedade (11) podemos formular o seguinte resultado:

Lema 2.2 É condição suficiente de estabilidade robusta para o sistema (2.10) que seja satisfeito:

$$\|M_{11}\|_{\bar{\mu}} \triangleq \sup_{\omega} \bar{\mu}[M_{11}(j\omega)] = \sup_{\omega} \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DM_{11}(j\omega)D^{-1}) \leq 1 \quad (2.18)$$

É ilustrativo mostrar este resultado mediante outros argumentos.

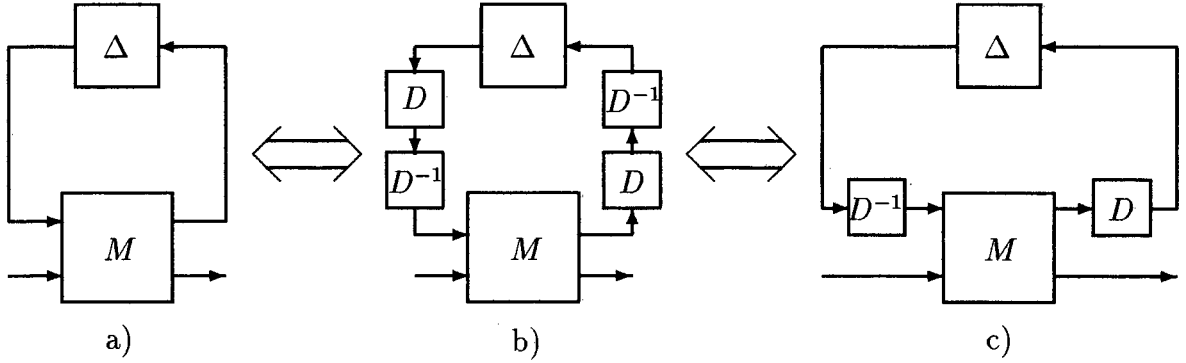


Figura 2.3: *Análise Robusta via "Scalings"*

O sistema incerto (2.10) está representado na figura 2.3.a onde $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$. Vamos definir o conjunto das matrizes de *scaling* dependentes da frequência como:

$$\mathcal{D}_s \triangleq \{D(s) \text{ racionais estáveis} \mid D(s)^{-1} \text{ é estável e } D(j\omega) \in \mathcal{D} \forall \omega\} \quad (2.19)$$

Inserindo em cada malha o bloco $D(s)^{-1}D(s)$, $D(s) \in \mathcal{D}_s$ como mostrado na figura 2.3.b o sistema permanece inalterado. Por último, já que $D\Delta D^{-1} = \Delta$ (propriedade 8) o sistema da figura 2.3.c é equivalente aos dois primeiros.

Pelo teorema 2.1 de estabilidade robusta frente a incertezas não estruturadas, e ignorando a estrutura Δ na figura 2.3.c temos uma condição suficiente de estabilidade robusta em:

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}[D(j\omega)M_{11}(j\omega)D(j\omega)^{-1}] = \|DM_{11}D^{-1}\|_{\infty} \leq 1 \quad (2.20)$$

Dado que podemos considerar em cada frequência aquele *scaling* que minimiza o primeiro membro de (2.20) chegamos a que é condição suficiente para a estabilidade robusta que:

$$\sup_{\omega} \min_{D(s) \in \mathcal{D}_s} \bar{\sigma}[D(j\omega)M_{11}(j\omega)D(j\omega)^{-1}] = \sup_{\omega} \bar{\mu}[M_{11}(j\omega)] \leq 1$$

□

Se aplicarmos o teorema 2.1 ao sistema 2.3.a obteríamos a condição:

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}[M_{11}(j\omega)] \leq 1$$

a qual é, em geral, muito conservativa. Ao introduzir os *scalings* reduz-se notavelmente a sua conservatividade já que:

$$\min_{D(s) \in \mathcal{D}_s} \bar{\sigma}[D(j\omega)M_{11}(j\omega)D(j\omega)^{-1}] \leq \bar{\sigma}[M_{11}(j\omega)]$$

2.4.3 Desempenho Robusto

De forma análoga ao caso não estruturado, vamos dizer que o sistema incerto da figura 2.1 tem Desempenho Robusto se satisfaz:

$$e \in \mathcal{BL}_2 \quad \forall r \in \mathcal{BL}_2 \quad \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta \quad (2.21)$$

Equivalentemente:

$$\|\mathcal{F}_u[M(s), \Delta]\|_\infty = \|M_{22} + M_{21}\Delta[I - M_{11}\Delta]^{-1}M_{12}\|_\infty \leq 1 \quad \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta \quad (2.22)$$

Como consequência do Teorema do Pequeno Ganho 2.2, a condição (2.22) é equivalente à estabilidade robusta do sistema resultante de realimentar a saída e na entrada r através de um bloco fictício Δ_d , $\bar{\sigma}(\Delta_d) < 1$ como está ilustrado na figura 2.4. Como já foi discutido, este problema é equivalente a uma condição em termos do μ , o que está formalizado no seguinte teorema [32].

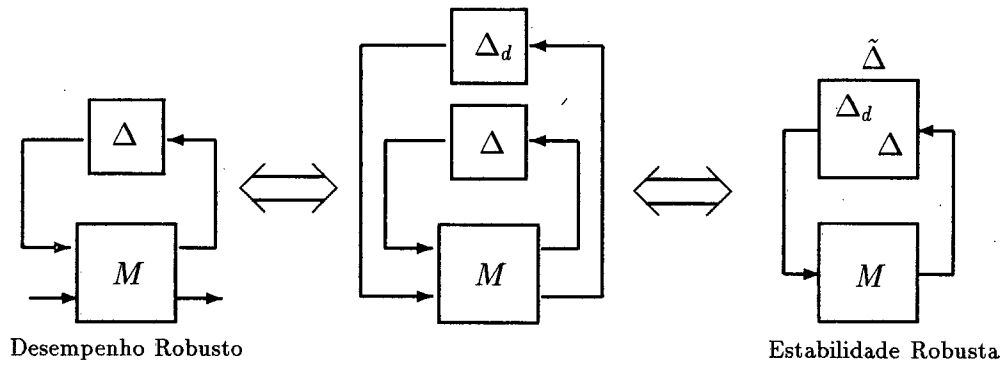


Figura 2.4: *Problema de Desempenho Robusto*

Teorema 2.6 (Desempenho Robusto)

$$\mathcal{F}_u[M(s), \Delta] \text{ é estável e } \|\mathcal{F}_u[M(s), \Delta]\|_\infty \leq 1 \quad \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta$$

se e somente se:

$$\|M\|_\mu \leq 1$$

onde μ é calculado com respeito à estrutura

$$\tilde{\Delta} = \{\tilde{\Delta} = \text{diag}(\Delta, \Delta_d) \mid \Delta \in \mathbf{B}\Delta\}$$

Este resultado permite abordar o problema de desempenho robusto com as mesmas ferramentas com as quais trata-se a estabilidade robusta. É consequência da equivalência entre estabilidade robusta e desempenho no contexto de \mathcal{H}_∞ . O bloco Δ_d pode ser pensado como um "bloco de desempenho" que compõe a estrutura $\tilde{\Delta}$ para a qual é calculado μ .

Incerteza	Estabilidade	Desempenho
$\Delta = 0$	$\mathcal{R}e(\lambda) < 0$	$\ M_{22}\ _{\infty} \leq 1$
$\bar{\sigma}(\Delta) < 1$	$\ M_{11}\ _{\infty} \leq 1$	$\ M\ _{\mu} \leq 1$
$\Delta \in \mathbf{B}\Delta$	$\ M_{11}\ _{\mu} \leq 1$	$\ M\ _{\mu} \leq 1$

Tabela 2.1: *Análise de Sistemas Incertos*

2.5 Conclusão

Os resultados mostrados ao longo deste capítulo estão reunidos na tabela 2.1. Em todos os casos, as condições derivadas são necessárias e suficientes. Além disso, as mesmas podem ser calculadas em forma precisa mediante algoritmos standard de otimização numérica⁴.

A norma \mathcal{H}_{∞} é a ferramenta de análise ótima para aqueles problemas não estruturados, tais como o desempenho nominal e a estabilidade robusta frente a incertezas não estruturadas. Como foi mostrado, o problema de desempenho robusto possui a estrutura dada pela incerteza e pelo bloco fictício de desempenho.

Enquanto as condições de estabilidade robusta envolvem apenas o bloco M_{11} dado que é sobre este que age a incerteza, as condições de desempenho robusto envolvem todo o sistema M . As estruturas Δ associadas em cada caso a μ são diferentes e não estão explicitadas na tabela.

A tabela 2.1 reflete de forma muito expressiva a potência da norma \mathcal{H}_{∞} e do valor singular estruturado na análise dos sistemas incertos considerados neste trabalho. Além disso, tanto a norma \mathcal{H}_{∞} quanto o μ constituem ferramentas de projeto poderosas, tema do capítulo seguinte.

⁴A única exceção é configurada pelo cálculo de μ para estruturas de mais de três blocos.

Capítulo 3

Síntese de Controladores

3.1 Introdução

Nesta seção começaremos a abordar o problema de síntese de controladores estabilizantes que garantam um desempenho ótimo segundo \mathcal{H}_∞ , \mathcal{H}_2 ou μ .

O sistema de controle está ilustrado na figura 3.1. Nela estão representados o controlador realimentado K , e a planta generalizada G . Esta inclui o que é usualmente chamado de planta em um problema de controle, e todas as funções de peso introduzidas para efeitos de escalonamento ou de ponderação. O sinal w contém as entradas externas incluindo perturbações, ruído de sensores e comandos; u é a ação de controle; y representa as saídas medidas para fins de realimentação; e z é um sinal de erro.

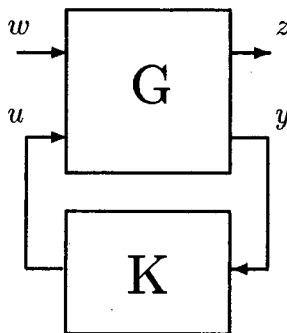


Figura 3.1: *Diagrama de Interconexão Padrão usado para Síntese*

Pode-se expressar $G(s)$ no espaço de estados como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u\end{aligned}\tag{3.1}$$

ou, usando uma notação mais compacta:

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (3.2)$$

A transferência em malha fechada desde w até z será denotada por T_{zw} e pode ser calculado como a LFT:

$$T_{zw} = \mathcal{F}_l(G, K)$$

Nossa atenção estará restrita àqueles controladores K cuja transferência é própria, e são estabilizáveis e detectáveis. Estes controladores serão ditos *admissíveis*.

O **Problema Padrão de Controle em \mathcal{H}_2** consiste na obtenção do controlador admissível que minimiza $\|T_{zw}\|_2$. Dado o isomorfismo entre o domínio temporal e o freqüencial, através do teorema de Parseval, este problema é equivalente ao problema LQG clássico.

Dado um escalar $\gamma > 0$, o **Problema Padrão de Controle em \mathcal{H}_∞** consiste na obtenção do controlador admissível que satisfaz $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. O controlador ótimo pode ser calculado por um algoritmo iterativo semelhante ao descrito para o cálculo da norma.

Analogamente, dada uma estrutura Δ , o problema da μ -**Síntese** consiste em achar o controlador admissível que minimize $\|T_{zw}\|_\mu$.

3.2 Problemas Padrão em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

Na seção 1.2 foi discutida a utilidade das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ como índices de desempenho na teoria de controle. As diferenças entre ambas abordagens podem ser atribuídas à modelagem e o tratamento das perturbações externas incertas [11]. A teoria \mathcal{H}_2 rejeita de forma ótima as perturbações quando elas são de forma conhecida ou processos estocásticos de espectro conhecido. A teoria \mathcal{H}_∞ assume que as perturbações pertencem ao espaço \mathcal{L}_2 de sinais quadraticamente integráveis e procura atenuá-las no pior caso, assumindo que elas podem concentrar a sua energia naquela freqüência e direção na qual o sistema é mais sensível.

Hipóteses sobre G :

A realização de G é assumida ser da forma:

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (3.3)$$

onde :

1. (A, B_1) é estabilizável e (C_1, A) é detectável.
2. (A, B_2) é estabilizável e (C_2, A) é detectável.
3. $D'_{12}[C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$
4. $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{12} \end{bmatrix} D'_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

A hipótese implícita na forma da representação (3.3) ($D_{11} = 0$ e $D_{22} = 0$) não acarreta perda de generalidade já que é possível, a partir de um problema geral, construir um problema equivalente com estas restrições [62]. A hipótese (2) é necessária e suficiente para a existência de um controlador dinâmico que estabilize G .

As condições restantes foram incluídas para simplificar a apresentação dos resultados ou a demonstração dos mesmos [30]. Destas, a condição (3) é equivalente a adotar uma penalidade não singular normalizada sobre a ação de controle u e que ambos termos no critério quadrático $\|z\|_2 = \|C_1x + D_{12}u\|_2$ sejam ortogonais. Isto equivale adotar um critério no domínio temporal, da forma:

$$J(u) = \|z\|_2^2 = \int_{t_0}^{\infty} [x' C_1' C_1 x + u' u] dt$$

onde não existem termos cruzados em u e x . A condição (4) é dual da (3).

O seguinte resultado apresenta a solução do Problema Padrão em \mathcal{H}_2 . O resultado envolve duas equações de Riccati com matrizes hamiltonianas dadas por:

$$H_2 = \begin{bmatrix} A & -B_2 B_2' \\ -C_1' C_1 & -A' \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} A' & -C_2' C_2 \\ -B_1 B_1' & -A \end{bmatrix}$$

que pelas hipóteses (1) e (2) e o lema A.3 pertencem ao $Dom(Ric)$ e as soluções respectivas são semidefinidas positivas (veja apêndice A).

Teorema 3.1 ([30]) *O controlador ótimo em \mathcal{H}_2 é:*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_2 u + L_2(C_2\hat{x} - y) \\ u &= F_2\hat{x} \end{cases} \quad (3.4)$$

Onde $F_2 = -B_2' X_2$, $L_2 = -Y_2 C_2'$ sendo $X_2 = Ric(H_2)$ e $Y_2 = Ric(J_2)$ as soluções respectivas às equações de Riccati associadas aos hamiltonianos já definidos:

$$A'X + XA - XB_2 B_2' X + C_1' C_1 = 0$$

$$AY + YA' - YC_2' C_2 Y + B_1 B_1' = 0$$

A estrutura do controlador é a de um regulador por realimentação do estado estimado \hat{x} . O ganho F_2 do regulador é a solução do problema LQR no qual o estado é suposto acessível para realimentação. Em forma dual, o ganho L_2 é a injeção de saída ótima, solução do problema de estimação do estado, equivalente ao filtro de Kalman Bucy (FKB) da Teoria de Controle Moderna. Este controlador exibe a conhecida propriedade de separação dos controladores LQG [47], já que a composição de ambas estruturas conserva a otimalidade.

Com relação ao Problema Padrão em \mathcal{H}_∞ , vamos considerar as seguintes matrizes hamiltonianas:

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1' - B_2B_2' \\ -C_1'C_1 & -A' \end{bmatrix}, J_\infty = \begin{bmatrix} A' & \gamma^{-2}C_1'C_1 - C_2'C_2 \\ -B_1B_1' & -A \end{bmatrix}$$

Ao contrário do caso \mathcal{H}_2 , estas matrizes não pertencem necessariamente ao domínio de Riccati, devido aos blocos (1,2) que não são de sinal definido, em geral. Como veremos a seguir, a existência de solução ao Problema Padrão \mathcal{H}_∞ está intimamente relacionada com este fato.

Teorema 3.2 ([30]) *Existe um controlador admissível tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ se e somente se as três condições a seguir são satisfeitas:*

1. $H_\infty \in \text{Dom}(\text{Ric})$ e $X_\infty \triangleq \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$.
2. $J_\infty \in \text{Dom}(\text{Ric})$ e $Y_\infty \triangleq \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$.
3. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$.

Quando estas condições forem satisfeitas, uma solução admissível é:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \gamma^{-2}B_1B_1'X_\infty\hat{x} + B_2u + Z_\infty L_\infty(C_2\hat{x} - y) \\ u &= F_\infty\hat{x} \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $F_\infty = -B_2'X_\infty$, $L_\infty = -Y_\infty C_2'$ e $Z_\infty = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}$.

O controlador (3.5) é chamado de controlador central e possui uma ordem igual à da planta generalizada $G(s)$. O conjunto dos controladores admissíveis tais que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ (que chamaremos de subótimos), pode ser descrito mediante uma LFT com um parâmetro livre $Q(s)$, tal que $\|Q\|_\infty < \gamma$, ([30], teorema 4).

Embora não seja o objetivo incluir a demonstração dos teoremas 3.1 e 3.2, é ilustrativo discutir algumas das propriedades dos controladores (3.4) e (3.5) no caso de realimentação de estado, no qual reduzem-se a $u = F_2x$ e $u = F_\infty x$ respectivamente.

A seguir são apresentados dois problemas que nos permitirão, senão demonstrar os resultados colocados, ao menos dar uma justificação deles e estudar a sua vinculação com o modelo das perturbações sobre o qual baseam-se ambas abordagens.

Problema Auxiliar \mathcal{H}_2 ¹:

$$\begin{cases} \min_{u \in \mathcal{L}_2+} \|z\|_2^2 \\ \text{sujeito a :} \\ \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ w(t) = w_0 \delta(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Solução:

O problema formulado é equivalente a considerar $w(t) = 0 \forall t$, e $x(0) = B_1 w_0$.

Consideremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x' X_2 x &= \dot{x}' X_2 x + x' X_2 \dot{x} = \\ &= x' (A' X_2 + X_2 A) x + 2 \langle u, B_2' X_2 x \rangle \end{aligned}$$

Usando a equação de Riccati associada a H_2 :

$$A' X_2 + X_2 A - X_2 B_2 B_2' X_2 + C_1' C_1 = 0$$

e substituindo, temos que:

$$\frac{d}{dt} x' X_2 x = -\|C_1 x\|^2 + \|B_2' X_2 x\|^2 + 2 \langle u, B_2' X_2 x \rangle$$

Dada a ortogonalidade de $C_1 x$ e $D_{12} u$, completamos os quadrados e:

$$\frac{d}{dt} x' X_2 x = -\|z\|^2 + \|u + B_2' X_2 x\|^2$$

Integrando essa expressão desde $t = 0$ até $t = \infty$:

$$\|z\|_2^2 = w_0' B_1' X_2 B_1 w_0 + \|u + B_2' X_2 x\|_2^2 \quad (3.6)$$

Portanto, a ação de controle ótima é uma realimentação de estado $u^* = F_2 x = -B_2' X_2 x$. Além disso, $u^* \in \mathcal{L}_2+$ já que o sistema em malha fechada é estável (lema A.2). \square

Através do problema de otimização formulado fica claro que esta abordagem rejeita de forma ótima perturbações impulsivas. Pode-se estender a afirmação anterior a perturbações de *forma conhecida*, as quais podem ser expressas como sistemas dinâmicos excitados por entradas

¹ \mathcal{L}_2+ denota as funções $w \in \mathcal{L}_2$ tais que $w(t) = 0$ para $t < 0$. $\delta(t)$ é a função impulso unitário

impulsionais da forma $w = w_0\delta(t)$, ou a perturbações modeladas como processos estocásticos de espectro conhecido [47]. Quando a perturbação não possui essas características, a otimalidade é perdida.

Para justificar a forma do controlador subótimo \mathcal{H}_∞ vamos supor satisfeitas as hipóteses do teorema 3.2 e considerar o seguinte problema:

Problema Auxiliar \mathcal{H}_∞ : Determine uma lei de controle $u(t) \in \mathcal{L}_{2+}$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \leq \gamma^2 \quad \forall w(t) \in \mathcal{L}_{2+} \\ \text{sujeito a :} \\ \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{12}u \\ x(0) = 0 \end{array} \right.$$

Solução: Dado que existe $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$ consideremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x'X_\infty x &= \dot{x}'X_\infty x + x'X_\infty \dot{x} = \\ &= x'(A'X_\infty + X_\infty A)x + 2\langle w, B_1'X_\infty x \rangle + 2\langle u, B_2'X_\infty x \rangle \end{aligned}$$

Usando a equação de Riccati associada a H_∞ :

$$A'X_\infty + X_\infty A - X_\infty B_2 B_2' X_\infty + C_1' C_1 + \gamma^{-2} X_\infty B_1 B_1' X_\infty = 0$$

temos que:

$$\frac{d}{dt}x'X_\infty x = -\|C_1x\|^2 - \gamma^{-2}\|B_1'X_\infty x\|^2 + \|B_2'X_\infty x\|^2 + 2\langle w, B_1'X_\infty x \rangle + 2\langle u, B_2'X_\infty x \rangle$$

Dada a ortogonalidade de C_1x e $D_{12}u$, completamos os quadrados e:

$$\frac{d}{dt}x'X_\infty x = -\|z\|^2 + \gamma^2\|w\|^2 - \gamma^2\|w - \gamma^{-2}B_1'X_\infty x\|^2 + \|u + B_2'X_\infty x\|^2$$

Integrando essa expressão desde $t = 0$ até $t = \infty$:

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2\|w\|_2^2 = -\gamma^2\|w - \gamma^{-2}B_1'X_\infty x\|_2^2 + \|u + B_2'X_\infty x\|_2^2$$

Portanto:

$$\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} = \gamma^2 - \frac{\gamma^2\|w - \gamma^{-2}B_1'X_\infty x\|_2^2}{\|w\|_2^2} + \frac{\|u + B_2'X_\infty x\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (3.7)$$

A equação (3.7) permite determinar uma solução ao problema formulado: $u^* \triangleq -B_2'X_\infty x = F_\infty x$. □

Os dois problemas formulados deixam clara a relação entre as soluções obtidas e as características das perturbações com as quais cada abordagem trabalha. Enquanto o regulador ótimo \mathcal{H}_2 rejeita perturbações de forma conhecida, o regulador subótimo \mathcal{H}_∞ garante um nível de rejeição para qualquer perturbação $w \in \mathcal{L}_2$, inclusive aquela que excita o sistema na frequência mais incômoda.

No caso geral o vetor de estado não está disponível para realimentação e será necessário construir um observador. A estrutura deste também reflete as diferenças entre as duas normas no tratamento das perturbações. No caso \mathcal{H}_2 é necessário construir um estimador para a entrada de controle $u = F_2x$ na presença de perturbações impulsivas. Este é um problema clássico da Teoria de Controle Moderna. Porém, no caso \mathcal{H}_∞ o problema consiste em construir um estimador para o sinal $u = F_\infty x$ garantindo um erro de estimação máximo menor do que γ frente a qualquer perturbação $w \in \mathcal{L}_2$. A "pior" perturbação neste caso é $w_{pior} \triangleq \gamma^{-2} B_1' X_\infty x$ e a dinâmica do sistema a ser observado passa a ser $A + \gamma^{-2} B_1 B_1' X_\infty$. Para esse sistema, o ganho de injeção de saída é $Z_\infty L_\infty$ ([30], prova do teorema 3).

A discussão anterior tentou justificar a estrutura do controlador (3.5) e mostrar a relação existente entre essa estrutura e o problema de atenuação de perturbações resultante de adotar a norma \mathcal{H}_∞ como índice de desempenho.

Os teoremas 3.1 e 3.2 assumem hipóteses algo restritivas sobre $G(s)$, mas podem ser relaxadas ao custo de uma maior complexidade da estrutura dos controladores resultantes. Existem pacotes de cálculo disponíveis comercialmente [8] que resolvem os Problemas Padrão em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ sob as seguintes hipóteses, sobre $G(s)$ da forma (3.2):

1. (A, B_2) é estabilizável e (C_2, A) é detectável.
2. D_{12} e D_{21} têm posto completo.
3. $\begin{bmatrix} A - j\omega & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tem posto completo por colunas para todo ω .
4. $\begin{bmatrix} A - j\omega & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ tem posto completo por linhas para todo ω .

A hipótese (1) é necessária e suficiente para que $G(s)$ seja estabilizável mediante uma realimentação dinâmica da saída. As restantes podem ser enunciadas mais brevemente como a inexistência de zeros invariantes no eixo imaginário para as transferências $G_{12}(s)$ e $G_{21}(s)$. Esta condição é referida na literatura como a não *singularidade* da planta $G(s)$.

Os resultados da referência [30] discutidos nesta seção tiveram um impacto notável no desenvolvimento da teoria \mathcal{H}_∞ [36, 48, 62]. Tem sido relatadas aplicações em áreas tão diversas

como controle de processos químicos [64, 49], aeronáutica [23, 63, 51, 59], indústria automotriz [46], robótica, sistemas elétricos de potência [34, 72], eletrônica de potência [20], etc.. As soluções obtidas para o problema \mathcal{H}_∞ subótimo são extremamente eficientes do ponto de vista do cálculo já que necessitam apenas a resolução de duas equações algébricas de Riccati. O problema ótimo em \mathcal{H}_∞ envolve uma iteração adicional com relação ao parâmetro γ . Porém, esses resultados sobrenfatizam o papel do controlador central não aproveitando os graus de liberdade existentes no conjunto de controladores subótimos para um dado γ . Estes, como já foi comentado, estão parametrizados como uma LFT com relação a um parâmetro dinâmico livre $Q(s)$. Esta parametrização não tem-se mostrado útil para aproveitar o conjunto dos controladores subótimos para atender especificações adicionais [36].

Além disso o controlador central exibe alguns inconvenientes. Ele apresenta uma tendência a cancelar pólos e/ou zeros da planta o que pode ser inaceitável quando a dinâmica cancelada é pobremente amortecida. Também apresenta um comportamento desfavorável nas vizinhanças da singularidade [36].

Existem abordagens alternativas nas quais o conjunto dos controladores subótimos é parametrizado como um conjunto convexo. Veja por exemplo [25, 56] e as referências ali listadas. Alternativamente, esse conjunto convexo pode ser descrito mediante Desigualdades Matriciais Lineares (LMI) [36]. Esta abordagem permite incluir os sistemas singulares sob um mesmo corpo teórico unificado, empregando ferramentas de otimização convexa que aproveitam a estrutura particular do problema e são, portanto, muito eficientes [35]. As referências [22, 33, 36, 45, 57] incluem aplicações e extensões destes resultados para satisfazer requisitos adicionais.

3.3 μ -Síntese

Como foi visto na seção 2.4 o valor singular estruturado é uma ferramenta adequada à análise de estabilidade e desempenho para sistemas com incertezas estruturadas. Nesta seção discutiremos suas características como ferramenta de síntese. Para isso, vamos supor dada uma estrutura Δ de incerteza, compatível com a definição (2.8), a que pode incluir blocos de desempenho. O problema de síntese envolve a determinação de um controlador admissível que minimize $\|T_{zw}\|_\mu$ para o sistema da figura 3.1:

$$\min_K \|T_{zw}\|_\mu = \min_K \|\mathcal{F}_l(G, K)\|_\mu$$

Como vimos, em geral, não é possível calcular μ exatamente; portanto, vamos formular o problema de síntese para seu limite superior $\bar{\mu}$ utilizando as seguintes igualdades:

$$\|\mathcal{F}_l(G, K)\|_{\bar{\mu}} = \max_{\omega} \min_{D_s} \bar{\sigma}[D\mathcal{F}_l(G, K)D^{-1}] = \min_{D_s} \|D(s)\mathcal{F}_l(G, K)D(s)^{-1}\|_\infty$$

Note-se a dependência dos *scaling* com a frequência.

O problema da μ -síntese pode, então, ser colocado como:

$$\min_K \|\mathcal{F}_l(G, K)\|_{\bar{\mu}} = \min_K \min_{D_s} \|D(s)\mathcal{F}_l(G, K)D(s)^{-1}\|_{\infty} \quad (3.8)$$

ou, esquematicamente, como na figura 3.2.

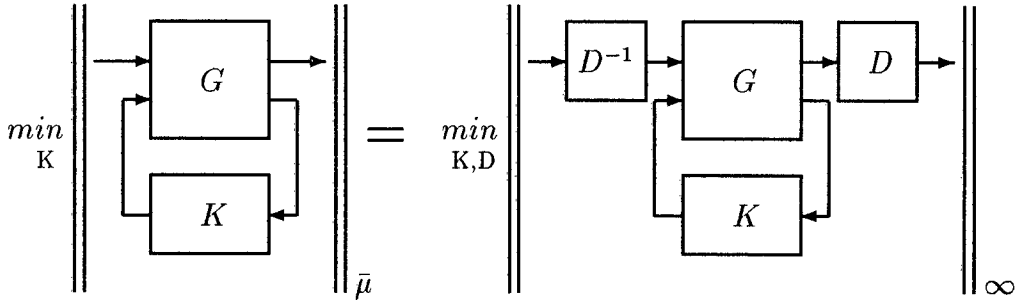


Figura 3.2: μ -Síntese

O problema de otimização (3.8) deve ser resolvido em relação a K e D conjuntamente. Devido à falta de convexidade não é possível, em geral, determinar o mínimo global.

3.3.1 Iteração D - K

O problema de μ -síntese não tem uma solução completa como os problemas padrão em \mathcal{H}_{∞} e \mathcal{H}_2 . Uma solução razoável é minimizar a expressão (3.8) alternativamente para K e D , mantendo-se a outra variável constante.

Se fixarmos D , o problema (3.8) reduz-se ao problema ótimo \mathcal{H}_{∞} o qual já foi estudado. Fixado K , o problema resultante pode ser resolvido em cada frequência como um problema de otimização convexo em D . Os valores resultantes de D calculados em um conjunto (necessariamente finito) de frequências ω_i podem ser interpolados por uma matriz de transferência real racional estável e de inversa estável [28]. Isto é possível porque D na expressão (3.8) está calculado no eixo imaginário e a sua fase não afeta a norma.

Em forma esquemática, os passos necessários para aplicar esta abordagem, chamada de **iteração D-K**, podem se resumir em:

1. Faça $D = I$.
2. Obtenha K resolvendo o problema ótimo em \mathcal{H}_{∞} correspondente.

3. Escolha um conjunto adequado de frequências $\omega_i, i = 1, \dots, N$. Resolva

$$\min_{D_i \in \mathcal{D}} \|D_i \mathcal{F}_l(G(j\omega_i), K(j\omega_i)) D_i^{-1}\|_\infty \quad \forall i = 1, \dots, N$$

4. Determine² $D(s) \in \mathcal{D}_s$ que interpole adequadamente as matrizes $D_i \quad \forall i = 1, \dots, N$.

5. Se o valor de $\|D \mathcal{F}_l(G, K) D^{-1}\|_\infty$ alcançado é satisfatório termine. Caso contrário, recomece pelo item 2 com o valor de $D(s)$ obtido.

Embora o algoritmo acima melhore o valor de $\|D \mathcal{F}_l(G, K) D^{-1}\|_\infty$ em cada iteração, ele não converge necessariamente ao ótimo global do problema (3.8). Porém, esta metodologia vem sendo utilizada com sucesso em múltiplas aplicações [1, 2, 8, 20, 21, 63].

A ordem da matriz $D(s)$ que interpola os *scalings* pode ser escolhida livremente pelo projetista, havendo um compromisso entre essa ordem e a exatidão da interpolação. Deve-se notar ainda que a ordem do controlador obtido é igual à ordem da planta $G(s)$ mais a ordem dos *scalings* $D(s)$ e $D(s)^{-1}$.

3.3.2 Iteração \mathcal{D} - \mathcal{K} com *Scaling* Constante

A seguir vamos restringir os *scalings* a serem matrizes constantes, ou seja $D(s) = D$. Isto traz consigo uma perda de otimalidade, mas como contrapartida, as facilidades de cálculo e a menor ordem do controlador obtido podem justificar essa perda em algumas aplicações. O problema (3.8) pode ser escrito como

$$\min_K \min_{D \in \mathcal{D}} \|D \mathcal{F}_l(G, K) D^{-1}\|_\infty \quad (3.9)$$

Pode ser mostrado que, no caso de realimentação de estados³, (3.9) pode ser colocado como um problema standard de otimização convexa de um objetivo linear sujeito a uma restrição LMI [54]. Neste caso, pode ser achado o ótimo global e a lei de controle resultante é uma realimentação estática do vetor de estados. Porém, a hipótese de realimentação de estados é muito restritiva na prática, e limita a aplicabilidade desse resultado.

Não é conhecida, ainda, uma formulação convexa para o problema (3.9) no caso de realimentação dinâmica de saída. Mas, como consequência do seguinte lema a **iteração \mathcal{D} - \mathcal{K}** tem propriedades numéricas atraentes.

Lema 3.1 ([4]) *Dado o sistema $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, uma estrutura Δ de incerteza, e o conjunto invariante \mathcal{D} definido em (2.15), as seguintes afirmativas são equivalentes:*

²Esta interpolação é feita geralmente mediante uma função de ordem fixada *a priori*.

³Mais precisamente, trata-se do problema "full information", definido em [30].

i) $G(s)$ é estável e existe uma matriz constante $S \in \mathcal{D}$ tal que $\|SG(s)S^{-1}\|_\infty < \gamma$.

ii) Existe $X > 0$ e $P > 0$, $P \in \mathcal{D}$ tais que

$$\begin{bmatrix} A'X + XA + \gamma^{-2}C'PC & XB + \gamma^{-2}C'PD \\ (XB + \gamma^{-2}C'PD)' & \gamma^{-2}D'PD - P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

Demonstração:

Dado que

$$SG(s)S^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A & BS^{-1} \\ \hline SC & SDS^{-1} \end{array} \right]$$

pelo Bounded Real Lemma (1.9) a condição i) é equivalente à existência de $X > 0$ e $S \in \mathcal{D}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} A'X + XA & XBS^{-1} & C'S' \\ (XBS^{-1})' & -\gamma I & (SDS^{-1})' \\ SC & SDS^{-1} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

Aplicando o complemento de Schur (lema B.1) pode ser mostrada, após alguma manipulação algébrica, a equivalência de (3.11) com:

$$\begin{cases} \sigma_{\max}(SDS^{-1}) < \gamma \\ A'X + XA + \gamma^{-2}C'S'SC + \\ + (XBS^{-1} + \gamma^{-2}C'S'SDS^{-1})(I - \gamma^{-2}S^{-T}D'S'SDS^{-1})^{-1}(XBS^{-1} + \gamma^{-2}C'S'SDS^{-1})' < 0 \end{cases}$$

A equivalência desta expressão com ii) resulta de fazer $P = S'S$ e aplicar o complemento de Schur convenientemente. \square

Com base neste resultado, o *scaling* constante ótimo pode ser calculado eficientemente mediante técnicas de otimização convexa.

Para ter-se uma idéia da conservatividade de usar *scalings* constantes vamos considerar as seguintes desigualdades:

$$\|G(s)\|_\mu \leq \min_{D(s) \in \mathcal{D}_s} \max_{\omega} \bar{\sigma}[D(j\omega)G(j\omega)D(j\omega)^{-1}] \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \|DG(s)D^{-1}\|_\infty$$

Cada termo nestas desigualdades tem um significado físico diferente [4, 14, 32].

- $\min_{D \in \mathcal{D}} \|DG(s)D^{-1}\|_\infty < 1$ é condição suficiente para a estabilidade do sistema incerto (2.10) frente a incertezas estruturadas não lineares variantes no tempo, contractivas⁴ [14].

⁴Um operador $z = \Delta(u)$ é dito contractivo se satisfaz

$$\int_0^T z(t)'z(t)dt \leq \int_0^T u(t)'u(t)dt \quad \forall u, T > 0$$

- $\min_{D(s) \in \mathcal{D}_s} \max_{\omega} \bar{\sigma}[D(j\omega)G(j\omega)D(j\omega)^{-1}] < 1$ é condição suficiente para a estabilidade frente a incertezas $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ lineares invariantes no tempo.
- $\|G(s)\|_{\mu} < 1$ é necessário e suficiente para a estabilidade robusta frente a incertezas $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ lineares invariantes no tempo.

Portanto, a conservatividade do uso de *scalings* constantes está em relação direta com a caracterização das incertezas. O *scaling* constante é adequado como ferramenta de síntese quando as incertezas podem se comportar como operadores não lineares variantes no tempo. Quando as incertezas podem ser descritas de acordo com o modelo (1.17) o uso de *scalings* constantes é potencialmente conservativo. Essa conservatividade é reforçada quando a estrutura inclui um bloco de desempenho, o qual é geralmente, linear e invariante no tempo [4].

Porém, a iteração $\mathcal{D}\text{-}\mathcal{K}$ com *scaling* constante é uma alternativa de projeto numericamente atraente, dado que não envolve nenhum tipo de interpolação no domínio complexo e a ordem do controlador resultante coincide com a que resulta de aplicar técnicas standard \mathcal{H}_{∞} .

3.4 Conclusão

As ferramentas de análise estudadas no capítulo 2 foram utilizadas neste capítulo para a síntese de controladores estabilizantes que garantam um desempenho ótimo segundo diferentes critérios.

Os problemas considerados aqui respondem ao seguinte esquema:

$$\min_{\mathcal{K}} \|\mathcal{F}_l(G, K)\|_{\alpha} \quad \alpha = 2, \infty, \text{ ou } \mu$$

Os primeiros dois casos foram estudados conjuntamente na seção 3.2 devido a seu paralelismo e para salientar o efeito das propriedades das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_{∞} discutidas no capítulo 1 sobre a estrutura do controlador ótimo respectivo. Esses problemas possuem uma solução em função de duas equações algébricas de Riccati. Foram discutidas algumas abordagens alternativas para o caso \mathcal{H}_{∞} envolvendo a resolução de problemas de otimização convexa.

Mostrou-se que o caso da μ -síntese é mais complexo e não pode ser resolvido exatamente, em geral. Porém, foi exposto o algoritmo conhecido como iteração $\mathcal{D}\text{-}\mathcal{K}$, o qual permite obter uma solução local ao problema de otimização formulado. Considerou-se separadamente os casos de iteração com matrizes de *scalings* dependentes da frequência, e com *scalings* constantes. Essas últimas possuem características computacionais interessantes. Como contrapartida, podem levar, em alguns casos, a projetos relativamente conservativos.

Capítulo 4

Controladores de Dois Graus de Liberdade

4.1 Introdução

O presente capítulo tem como objetivo abordar a questão da estrutura do controlador e a sua relação com os tipos de problemas de controle que essa estrutura permite atender.

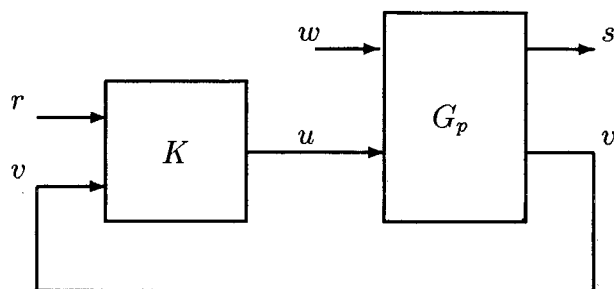


Figura 4.1: *Sistema Controlado por um Controlador de Dois Graus de Liberdade*

Considere o sistema de controle da figura 4.1. A planta G_p está excitada por perturbações externas w e pela ação de controle, u . O vetor de saída s contém todas as variáveis a controlar e o vetor v representa as saídas medidas para realimentação. O controlador K processa em forma independente o vetor de saída v e o vetor r de sinais de referência e comando. O controlador K pertence a uma classe de controladores referida na literatura como **Controladores de Dois Graus de Liberdade**, que é mais geral que o esquema clássico de controle, e permite considerar eficazmente diversas especificações de projeto.

Com relação ao esquema da figura 4.1 podem ser colocadas diversos objetivos de controle que vamos separar em dois grupos seguindo a nomenclatura de [58]:

Problemas "Tipo Servo":

- Seguimento de sinais de referência.
- Requisitos sobre o tipo de resposta a comandos (amortecimento, largura de faixa, etc.).
- Desacoplamento entre grupos de canais de entrada e saída.

Problemas "Tipo Regulador":

- Estabilidade.
- Rejeição de perturbações.
- Robustez
- Regulação.
- Alocação de pólos.

A resenha anterior não é, em absoluto, exaustiva, mas é útil para distingüir os dois grandes grupos de problemas. O primeiro tipo envolve restrições sobre a transferência T_{sr} entre a referência e as saídas a controlar.

Os problemas do "tipo Regulador" envolvem restrições sobre a resposta não forçada do sistema controlado, ou sobre a resposta às perturbações externas T_{sw} . Dado que sempre é possível tratar o estado inicial como uma perturbação externa a um sistema com estado inicial nulo, os problemas do "tipo Regulador" podem ser colocados na sua totalidade, como especificações sobre a transferência T_{sw} .

Há um compromisso, em geral, entre as diferentes especificações dentro de cada grupo. Porém, mediante um controlador K como o da figura 4.1, os problemas de ambos os grupos podem ser resolvidos independentemente uns dos outros [58]. Além disso, pode-se decompor o controlador K em duas parcelas, cada uma relacionada fortemente com um grupo de problemas de controle dos já colocados.

O significado preciso dessa independência e sua relação com a estrutura de K é apresentado na seção 4.2. Com base nesses resultados, têm sido descritas várias técnicas de síntese de controladores de dois graus de liberdade. A seção 4.3 inclui uma discussão das de maior interesse para esta dissertação.

Na seção 4.4 são propostas técnicas de síntese em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , para uma classe de controladores de dois graus de liberdade, que implicam em maiores facilidades de implementação devido à menor ordem do controlador obtido.

4.2 Fundamentos

Considere o sistema de controle da figura 4.1. A planta G_p representa um sistema dinâmico linear invariante no tempo, próprio, de dimensão finita. É assumida a estabilizabilidade pela entrada u e a detectabilidade em relação a v , hipóteses que asseguram a existência de um controlador dinâmico que estabiliza o sistema. A transferência entre u e v é suposta estritamente própria.

O controlador K é suposto pertencer à classe de controladores próprios para os quais o sistema em malha fechada é estável, referidos na sequência como **controladores admissíveis**.

Definamos a classe \mathcal{H} de todas as transferências T_{sr} que podem ser obtidas entre r e s com controladores K admissíveis. Similarmente, definamos \mathcal{F} como a classe de todas as transferências T_{sw} que podem ser obtidas mediante um controlador K admissível. Ambas as classes podem ser caracterizadas completamente em função dos parâmetros da planta G_p [58].

Teorema 4.1 ([58]) *Dadas duas transferências H e F tais que $H \in \mathcal{H}$ e $F \in \mathcal{F}$, então existe K admissível tal que $T_{sr} = H$ e $T_{sw} = F$.*

O teorema 4.1 admite a seguinte interpretação:

Vamos supor que existam duas transferências H e F que satisfazem as especificações de desempenho com relação a T_{sr} e T_{sw} respectivamente (problemas "tipo servo" e "tipo regulador"). Assumamos também que essas transferências são atingíveis: $H \in \mathcal{H}$ e $F \in \mathcal{F}$. Portanto, existem dois conjuntos \mathcal{K}_H e \mathcal{K}_F de controladores admissíveis tais que

$$T_{sr} = H \quad \forall K \in \mathcal{K}_H$$

$$T_{sw} = F \quad \forall K \in \mathcal{K}_F$$

A contribuição do teorema 4.1 é a afirmativa de que esses conjuntos têm intersecção não vazia, e portanto existe um controlador admissível que satisfaz ambos os grupos de especificações satisfatoriamente em forma simultânea.

Ambos tipos de problemas são independentes nesse sentido, se é possível obter um controlador que resolva os problemas de cada grupo separadamente, então é possível obter um controlador que os resolva conjuntamente. Não existe nenhum compromisso entre os problemas do "tipo servo" e os do "tipo regulador".

A independência entre ambos grupos de especificações é uma consequência da estrutura

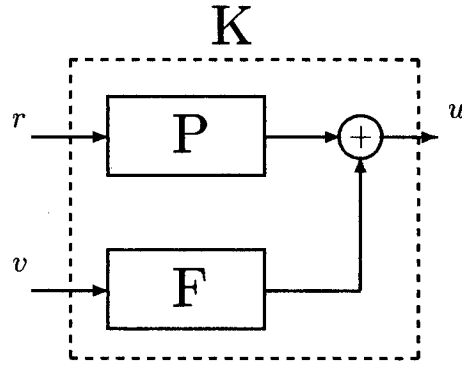


Figura 4.2: *Controlador de Dois Graus de Liberdade*

do controlador de dois graus de liberdade. A lei de controle

$$u = K \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

pode ser escrita como na figura 4.2, isto é:

$$u = Fv + Pr$$

Fv representa a parcela realimentada da lei de controle, e Pr representa a ação *feed-forward* da mesma. Na sequência referiremo-nos a F como o "controlador realimentado" e a P como o "prefiltro". Essa estrutura é mais geral que os clássicos esquemas de controle realimentado que não incluem o prefiltro.

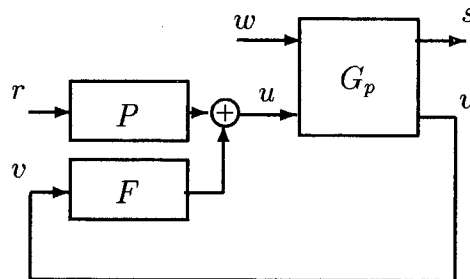


Figura 4.3: *Sistema Controlado por um Controlador de Dois Graus de Liberdade*

O significado do teorema 4.1 pode aparecer mais claro considerando a figura 4.3. Com relação à partição

$$G_p = \begin{bmatrix} G_{p11} & G_{p12} \\ G_{p21} & G_{p22} \end{bmatrix}$$

resulta

$$T_{sr} = G_{p12}F[I - G_{p22}F]^{-1}P = \mathcal{F}_l\left(\begin{bmatrix} 0 & G_{p12} \\ I & G_{p22} \end{bmatrix}, F\right)P \quad (4.1)$$

$$T_{sw} = \mathcal{F}_l[G_p, F] \quad (4.2)$$

Os problemas do tipo regulador são atendidos exclusivamente pelo controlador realimentado F , como resulta de (4.2). A transferência T_{sr} depende de ambas parcelas, mas a forte dependência de P , que entra em série, faz do prefiltro a ferramenta de projeto mais fortemente relacionada com os problemas tipo servo.

Este tipo de considerações envolvem conceitos clássicos na teoria de controle como o de realimentação e o de ação *feed-forward*. Porém, a inexistência de um compromisso entre eles é um resultado relativamente recente, demonstrado originalmente em 1981.

4.3 Técnicas de Síntese de Controladores de Dois Graus de Liberdade

O teorema 4.1 repousa implicitamente na inexistência de restrições sobre a ordem do controlador K . Se a análise é restrita aos controladores admissíveis de ordem limitada, as classes resultantes \mathcal{H} e \mathcal{F} reduzem-se notavelmente e a independência comentada é perdida. Na prática, existirá um compromisso entre o projeto do controlador realimentado F e o do prefiltro P .

Os tipos de problemas para os quais são projetados o prefiltro e o controlador realimentado são, em geral, de natureza diferente. Portanto, é natural que a técnica mais adequada ao projeto de cada parcela possa não ser a mesma.

Têm sido relatados vários métodos de síntese de controladores de dois graus de liberdade, os quais têm usado diferentes técnicas como \mathcal{H}_2 , LQG/LTR, \mathcal{H}_∞ , e Posicionamento de Autoestrutura.

Em [39] os autores empregaram técnicas de Posicionamento de Autoestrutura na síntese do controlador realimentado para um modelo de helicóptero em baixa velocidade. O prefiltro estático foi determinado mediante simples técnicas de mínimos quadrados. O controlador obtido garante determinados tipos de respostas desejadas nos diferentes canais, e assegura um excelente desacoplamento entre os mesmos para o modelo nominal. Porém, não aparece muito clara a possibilidade de incorporar especificações de robustez a este tipo de projeto.

Para utilizar técnicas de controle ótimo em \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ para o projeto do prefiltro é necessário montar uma estrutura de interconexão apropriada. Consideremos a figura 4.4 a qual exhibe uma estrutura conhecida como "model following" [21, 23, 49].

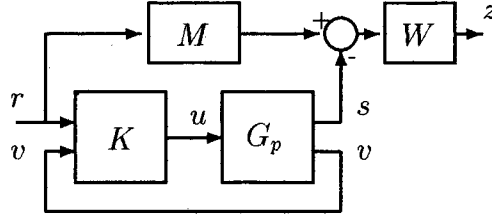


Figura 4.4: Esquema de "Model Following"

G_p denota a planta, K o controlador de dois graus de liberdade, e M o modelo de referência que expressa a resposta a comandos desejada. O bloco W pondera, no domínio da frequência, o erro em relação ao modelo M . Para a síntese do prefiltro, é necessário ter obtido previamente o controlador realimentado que assegure a estabilidade do sistema e algum tipo de desempenho relativo aos problemas "tipo regulador". O prefiltro P é determinado de tal forma que minimize esse erro ponderado, no sentido da norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . É possível, a partir do diagrama da figura 4.4 expressar o problema de síntese de maneira standard na qual estão formulados os problemas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Para o projeto do controlador realimentado pode ser empregada uma estrutura clássica como a da figura 4.5 [42, 46, 48, 49, 63]. Os pesos W_e , W_u e W_y ponderam respectivamente o

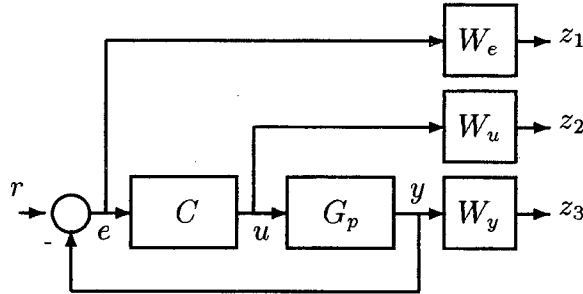


Figura 4.5: Estrutura de Interconexão \mathcal{H}_∞ (\mathcal{H}_2)

signal de erro de seguimento e , a ação de controle u , e a saída y . Dadas as convenções adotadas na figura 4.2, o controlador realimentado F coincide com $-C$.

Alternativamente, o prefiltro e o controlador realimentado podem ser sintetizados conjuntamente em um só passo, mediante a estrutura da figura 4.6, na qual estão ponderados simultaneamente todos os compromissos de controle dos esquemas anteriores [49]. Essa estrutura foi utilizada em [23, 49] para o projeto de controladores robustos, mediante técnicas \mathcal{H}_∞ .

Embora a síntese \mathcal{H}_∞ em dois passos explore melhor a independência de ambos os problemas de síntese, este procedimento leva a controladores de ordem muito alta. O prefiltro resultante vai ter uma ordem igual à da soma da planta, do controlador realimentado, e dos

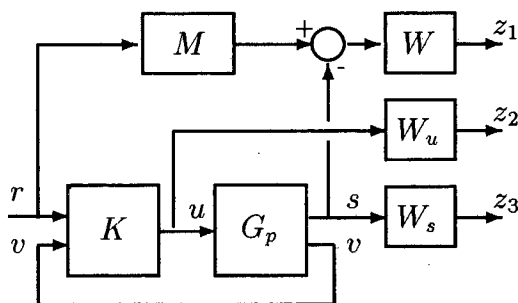


Figura 4.6: Síntese \mathcal{H}_∞ em um só passo

blocos de ponderação. A vantagem do esquema da figura 4.6 é a menor ordem resultante, ao preço de um desempenho potencialmente mais pobre.

A conveniência ou não de usar a norma \mathcal{H}_∞ como critério de desempenho para o projeto do prefiltro depende da caracterização das entradas de referência. Se essas entradas são em certo grau desconhecidas, e podem concentrar a sua energia em faixas de frequências relativamente estreitas, as técnicas em \mathcal{H}_∞ podem ser as mais adequadas. Se, pelo contrário, os sinais de comando pertencem a um conjunto reduzido de sinais de teste, tais como degraus, rampas, etc., a melhor escolha é sem dúvida, \mathcal{H}_2 . Este último parece ser o caso mais comum com relação aos sinais de comando.

Uma boa discussão acerca das diversas técnicas de projeto de controladores de dois graus de liberdade pode ser encontrada em [23]. Nessa referência também é proposta a escolha de prefiltros estáticos para o caso \mathcal{H}_2 e LQG/LTR, com o objetivo de obter uma resposta em regime permanente perfeitamente desacoplada e sem erro.

4.4 Técnicas de Projeto em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para uma Classe de Prefiltros

Embora as técnicas de projeto em um só passo citadas na seção anterior possam ser úteis em muitas aplicações, as naturezas diferentes dos tipos de problemas relacionados ao controlador de dois graus de liberdade motivam um interesse especial em técnicas de projeto separadas para o prefiltro P e o controlador realimentado F . Com relação a este último, já foram colocados vários métodos de síntese no capítulo 3. Embora esses métodos possam ser usados para o prefiltro, implicariam em uma ordem muito alta para este, dificultando sua implementação.

É importante, então, possuir metodologias de projeto de prefiltros ótimos em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ que não impliquem uma ordem dinâmica proibitiva. Essa é a motivação da presente seção.

É assumido que já foi obtido, mediante alguma técnica, o controlador realimentado F , de tal maneira que a estabilidade em malha fechada é satisfeita.

Considera-se, então, que o controlador F é dado, e pode ser escrito como:

$$F(s) = \left[\frac{A_F}{C_F} \middle| \frac{B_{Fv}}{D_v} \right] \quad (4.3)$$

A estrutura que vamos adotar para o controlador de dois graus de liberdade é aquela que, tendo como parte realimentada o próprio F , não implica em uma maior ordem dinâmica:

$$K(s) = \left[\frac{A_F}{C_F} \middle| \frac{B_{Fr}}{D_{Fr}} \quad \frac{B_{Fv}}{D_v} \right] \quad (4.4)$$

B_{Fr} e D_{Fr} expressam os graus de liberdade na síntese do prefiltro e constituem os parâmetros a serem determinados. O prefiltro resulta:

$$P(s) = \left[\frac{A_F}{C_F} \middle| \frac{B_{Fr}}{D_{Fr}} \right] \quad (4.5)$$

Fica claro que P explora a dinâmica de F no processamento dos sinais de referência e comando.

Os parâmetros livres B_{Fr} e D_{Fr} permitem modificar a resposta a comandos T_{sr} mantendo para K a mesma dimensão dinâmica do controlador F .

É interessante notar que, embora a ordem do sistema controlado seja a mesma com ou sem prefiltro, este não é estático. O prefiltro estático é um caso particular que é obtido fazendo $B_{Fr} = 0$ em (4.4).

Para a síntese do prefiltro vamos utilizar a estrutura da figura 4.4. Essa estrutura admite uma representação padrão na forma da figura 4.7, onde a planta generalizada G tem uma estrutura particular:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 r + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} r + D_{12} u \\ y &= \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ C_{2v} x + D_{22v} u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde $x(t) \in R^n$, $r(t) \in R^{dr}$, $u(t) \in R^{du}$, $z(t) \in R^{dz}$, $v \in R^{dv}$.

Na notação standard:

$$G(s) = \left[\frac{A}{C_1} \middle| \frac{B_1}{D_{11}} \quad \frac{B_2}{D_{12}} \right] \quad (4.6)$$

onde

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2v} \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{22v} \end{bmatrix}$$

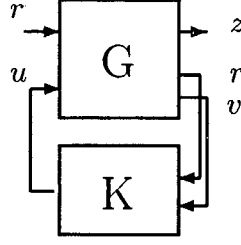


Figura 4.7: *Representação Standard para a Síntese do Prefiltro*

Por simplicidade vamos assumir $D_{22v} = 0$.

O problema de síntese de prefiltros subótimos em \mathcal{H}_∞ que vamos abordar pode ser colocado da seguinte forma: dado $\gamma > 0$, determinar um controlador K compatível com a estrutura (4.4), tal que $\|T_{zr}\|_\infty < \gamma$. De forma similar, o problema de síntese em \mathcal{H}_2 consiste em determinar a lei de controle compatível com (4.4) que minimiza $\|T_{zr}\|_2$.

Consideremos o controlador $K(s)$ dado na equação (4.4). Do sistema em malha fechada das figuras 4.4 e 4.7 resulta

$$T_{zr} = \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] \quad (4.7)$$

com

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_{Fv} C_{2v} & B_2 C_F \\ B_{Fv} C_{2v} & A_F \end{bmatrix} \\ B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_{Fr} \\ B_{Fr} \end{bmatrix} = B_{cl0} + B_{clr} R \\ C_{cl} &= \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_{Fv} C_{2v} & D_{12} C_F \end{bmatrix} \\ D_{cl} &= D_{11} + D_{12} D_{Fr} = D_{cl0} + D_{clr} R \end{aligned}$$

Por conveniência introduzimos as seguintes constantes

$$B_{cl0} \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{clr} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$D_{cl0} \triangleq D_{11}, \quad D_{clr} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & D_{12} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e a seguinte variável que contém os parâmetros livres do prefiltro

$$R \triangleq \begin{bmatrix} B_{Fr} \\ D_{Fr} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

É conveniente notar que A_{cl} e C_{cl} são constantes, isto é, não dependem dos parâmetros livres do prefiltro.

4.4.1 Síntese do Prefiltro em \mathcal{H}_∞

Hipóteses:

- $D_{22v} = 0$.
- A_{cl} é assintoticamente estável.

Proposição 4.1 *O problema de síntese do prefiltro subótimo em \mathcal{H}_∞ tem solução se e somente se existe uma matriz simétrica $Y > 0$ de dimensões $(n + n_k) \times (n + n_k)$, e $R \in R^{(n_k + du) \times dr}$ tais que:*

$$\begin{bmatrix} Y A'_{cl} + A_{cl} Y & B_{cl0} + B_{clr} R & Y C'_{cl} \\ B'_{cl0} + R' B'_{clr} & -\gamma I & D'_{cl0} + R' D'_{clr} \\ C_{cl} Y & D_{cl0} + D_{clr} R & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

Demonstração:

Pelo "Bounded Real Lemma" (vide teorema 1.1) o problema formulado é equivalente à existência de uma matriz simétrica $X_{cl} > 0$ tal que:

$$\begin{bmatrix} A'_{cl} X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C'_{cl} \\ B'_{cl} X_{cl} & -\gamma I & D'_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Chamemos $Y = X_{cl}^{-1}$. Pre e Pós-multiplicando pela matriz definida positiva

$$\begin{bmatrix} Y & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e considerando as definições (4.8) e (4.9), após alguma manipulação algébrica obtemos a expressão (4.11). Os parâmetros do prefiltro podem ser obtidos a partir de R pela equação (4.10). \square

A expressão (4.11) envolve um problema de factibilidade de uma LMI nos parâmetros γ , Y and R , e é resolúvel de maneira muito eficiente [35].

A síntese do prefiltro ótimo em \mathcal{H}_∞ pode ser formulada, então, como um problema standard de minimização de um objetivo linear sujeito a uma restrição LMI.

4.4.2 Síntese do Prefiltro em \mathcal{H}_2

Para o sistema em malha fechada (4.7), se $D_{cl} = 0$, temos

$$\| T_{zr} \|_2 = \text{Tr}(B'_{cl} L_o B_{cl})$$

onde L_o é o gramiano de observabilidade. É um fato conhecido que L_o satisfaz a equação de Lyapunov

$$A'_{cl}L_o + L_oA_{cl} + C'_{cl}C_{cl} = 0 \quad (4.12)$$

Note que L_o não depende dos parâmetros livres do prefiltro.

Hipóteses:

- $D_{22v} = 0, D_{11} = 0, D_{12} = 0.$
- A_{cl} é assintoticamente estável.
- (C_{cl}, A_{cl}) é completamente observável.
- B_2 tem posto completo.

Proposição 4.2 *Os parâmetros de projeto que minimizam $\|T_{zr}\|_2$ são dados por*

$$R = -(B'_{clr}L_oB_{clr})^{-1}B'_{clr}L_oB_{clo} \quad (4.13)$$

onde o gramiano L_o é a única solução da equação de Lyapunov (4.12).

Demonstração:

As primeiras duas hipóteses são necessárias e suficientes para a existência da norma 2. O mínimo da forma quadrática $Tr(B'_{cl}L_oB_{cl})$ é atingido para R tal que:

$$\frac{d}{dR}Tr[(B_{clo} + B_{clr}R)'L_o(B_{clo} + B_{clr}R)] = 0$$

o que dá

$$B'_{clr}L_o(B_{clo} + B_{clr}R) = 0$$

e então,

$$B'_{clr}L_oB_{clr}R = -B'_{clr}L_oB_{clo}$$

B_{clr} tem posto completo, pois foi assumido que B_2 tem posto completo (vide (4.8)). Além disso, o gramiano L_o é definido positivo já que o sistema é observável. Então, a matriz $B'_{clr}L_oB_{clr}$ também é definida positiva, e sua inversa existe. A única solução é, então, a dada por (4.13). \square

Este resultado oferece uma ferramenta muito simples e fácil de usar no projeto de prefiltros.

4.5 Conclusão

Neste capítulo revisamos alguns problemas clássicos da Teoria de Controle e sua relação com a estrutura do controlador.

O clássico esquema de controlador realimentado, adequado para atender problemas tais como estabilidade, rejeição de perturbações e robustez, leva a desempenhos relativamente pobres frente a requisitos adicionais envolvendo a resposta a comandos. Nesses casos, resulta proveitosa a inclusão da ação "feed-forward" na lei de controle. Este tipo de controladores é correntemente referido na literatura como "Controladores de Dois Graus de Liberdade".

Foi discutido o compromisso entre ambos tipos de problemas e sua relação com a ordem dinâmica dos controladores.

Na seção 4.3 são comentadas algumas metodologias de síntese de controladores de dois graus de liberdade. São discutidas as vantagens das diversas metodologias com relação à ordem do controlador resultante, e a adequação dos critérios de desempenho para cada tipo de problema. Com base nessa análise, destacamos a utilidade das técnicas de síntese separadas para cada ação de controle, que permitam sintetizar o prefiltro independentemente da técnica utilizada para o controlador realimentado.

Na seção 4.4 foi proposta uma estrutura particular para o prefiltro que possui a vantagem de não aumentar a ordem do controlador ao se inserir o prefiltro. Para essa estrutura foram derivadas técnicas de projeto ótimas com relação às normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , que constituem uma contribuição do presente trabalho.

Capítulo 5

Aplicação

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores foi exposto um desenvolvimento teórico que nos permite analisar as propriedades de sistemas lineares incertos, assim como projetar controladores que garantam essas propriedades em malha fechada. Este capítulo visa, por um lado, ilustrar a utilização de algumas dessas técnicas amplamente conhecidas e, por outro lado, demonstrar a aplicabilidade das técnicas propostas no capítulo 4.

Com esse propósito, vamos considerar o problema do controle de um helicóptero em vôo pairado. Trata-se de um sistema multivariável, com um acoplamento modal considerável, sujeito a variações paramétricas e com diversos elementos dinâmicos incertos. Nos últimos anos o controle de helicópteros tem merecido muita atenção e tem lido sido aplicadas diversas técnicas de controle robusto [2, 3, 10, 39, 51, 59, 68].

Suas principais características dinâmicas são comentadas brevemente na seção seguinte. A seguir é apresentado o modelo que utilizaremos, incluindo a caracterização da dinâmica incerta, e é formulado o conjunto de especificações de desempenho que devem ser satisfeitas.

Posteriormente são utilizadas técnicas de controle robusto visando obter um conjunto de requisitos de desempenho compatível com os padrões respectivos. Na seção 5.4 é projetado um controlador de dois graus de liberdade mediante técnicas de μ -síntese. Posteriormente a parte correspondente ao prefiltro é reprojetaada mediante a técnica em \mathcal{H}_2 da seção 4.4.

O desempenho é avaliado tanto para o sistema incerto, mediante as ferramentas do capítulo 3, quanto para o sistema nominal, mediante técnicas clássicas no domínio temporal e frequencial.

5.2 Elementos da Dinâmica do Helicóptero

O objetivo desta seção é apresentar as principais características dinâmicas de um helicóptero operando em vôo pairado. Para tal fim são apresentados brevemente os elementos constitutivos do helicóptero, a definição das coordenadas usadas na descrição de seu movimento e as ações de controle. Uma discussão completa e abrangente destes tópicos pode ser encontrada em [19, 38, 52, 60].

A característica principal do helicóptero é a sua possibilidade de pouso e decolagem na vertical e de vôo pairado. Essa característica o diferencia claramente das aeronaves convencionais de asa fixa onde o empuxo de sustentação é obtido como consequência de um importante movimento translacional para frente. No caso do helicóptero, a sustentação é aportada pelo rotor principal. Além disso, o empuxo gerado pelo rotor principal pode ser direcionado lateral ou longitudinalmente, afim de deslocar a aeronave. O rotor de cauda gera o empuxo necessário para a compensação do torque reativo causado pelo rotor principal, e para comandar o movimento de guinada do helicóptero. Além dos rotores, existem superfícies aerodinâmicas conhecidas como estabilizadores, as quais agem em função da velocidade de deslocamento e tendem alinhar a cauda com o eixo do movimento.

O empuxo do rotor principal é o principal elemento de controle do movimento, e tem sua magnitude e direção controladas pelo ângulo δ_M de incidência das pás. Esse ângulo depende da posição instantânea ξ da pá na sua revolução [60]:

$$\delta_M = \delta_{colM} - \delta_{lat}\cos\xi - \delta_{long}\sin\xi$$

O ângulo δ_{colM} , chamado de *passo coletivo do rotor principal*, representa o valor médio de δ_M em uma revolução e determina diretamente a magnitude do empuxo. δ_{lat} e δ_{long} são conhecidos por *passo cíclico lateral e longitudinal* respectivamente, e determinam a direção do empuxo.

O movimento de guinada do helicóptero é controlado mediante o *passo cíclico do rotor de cauda* δ_{colT} .

O movimento do helicóptero será descrito em função das coordenadas da figura 5.1 onde ϕ , θ e ψ são os ângulos de *roll* (rolamento), *pitch* (arfagem) e *yaw* (guinada) costumeiros em aeronáutica¹.

A velocidade do centro de massas \vec{V}_g e a velocidade angular $\vec{\omega}$ estão referidas ao sistema de eixos do corpo:

$$\vec{V}_g = (u_g, v_g, w_g)$$

¹Neste caso, e no do movimento vertical (*heave*), preferimos utilizar os termos ingleses, amplamente difundidos neste tipo de aplicações.

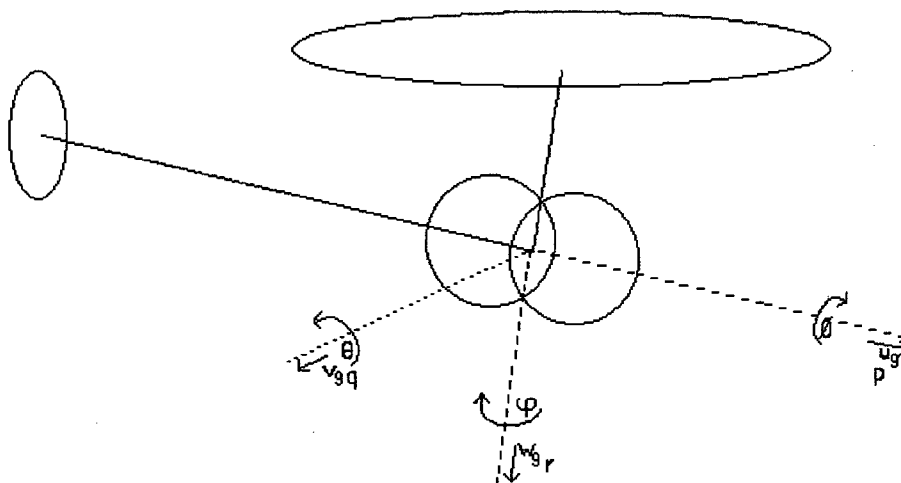


Figura 5.1: *Sistema de Coordenadas*

$$\vec{\omega} = (p, q, r)$$

Do ponto de vista dinâmico, o helicóptero é uma estrutura flexível sujeita a solicitações aerodinâmicas, inerciais e ao próprio peso. Além disso, o rotor principal possui sua própria dinâmica associada aos movimentos de "flapping" e "lead-lag" das pás [60]. O helicóptero possui, portanto, uma dinâmica altamente não linear, com elementos difíceis de modelar como os fenômenos aerodinâmicos associados ao rotor principal e os modos flexíveis da fuselagem. Porém, essa dinâmica altamente incerta não é relevante no comportamento em baixas frequências onde o sistema pode ser modelado adequadamente como um corpo rígido. A falta de linearidade não é contornável facilmente, e se faz necessário analisar separadamente diferentes regimes de voo.

O regime de voo de nosso interesse é o voo pairado, conhecido na literatura inglesa como "hover". Neste regime, o helicóptero permanece quieto no ar, com velocidade nula. Como consequência disso, as superfícies estabilizadoras da cauda não agem, e a dinâmica está dominada pelos dois rotores. Tipicamente existe um forte acoplamento entre os diferentes modos de movimento, o que dificulta a ação do piloto, especialmente em condições de baixa visibilidade ou de tarefas simultâneas [39, 50, 60]. Além disso, a resposta possui modos instáveis no movimento longitudinal e lateral [60].

Além das incertezas dinâmicas já mencionadas, o helicóptero está sujeito a variações de determinados parâmetros associados a diferentes condições de voo. O mais relevante para nossa análise é o peso total da aeronave, o qual varia apreciavelmente ao longo de uma missão.

Essa variação é devida principalmente ao peso do combustível, que pode representar entre 15 e 20 % do peso total dependendo do tipo de helicóptero [60].

5.3 Apresentação do Exemplo

Vamos considerar o modelo de helicóptero operando em vôo pairado descrito em [39]. Esse modelo corresponde a um helicóptero militar de quatro pás e tem sido usado como exemplo na aplicação de várias técnicas de projeto [38, 39, 50]. O mesmo é de oitava ordem e inclui de uma forma residualizada a dinâmica do rotor principal.

O vetor de estado é composto pelas componentes da velocidade do centro de massa \vec{V}_g , da velocidade angular $\vec{\omega}$ e pela atitude em *roll* e *pitch*:

$$x = [u_g, v_g, w_g, p, q, r, \phi, \theta]'$$

A ação de controle u é composta pelo passo coletivo do rotor principal, passo cíclico lateral, passo cíclico longitudinal e passo coletivo do rotor de cauda:

$$u = [\delta_{colM}, \delta_{lat}, \delta_{long}, \delta_{colT}]'$$

As saídas medidas para realimentação são dadas por:

$$v = [w_g, p, q, r, \phi, \theta]'$$

Para facilitar o manuseio de um conjunto de grandezas de diferente significado físico, o modelo adotado é adimensionado. A representação no espaço de estados será, então, dada por²

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ v = Cx \end{cases} \quad (5.1)$$

O sistema em malha aberta tem seus modos fortemente acoplados, possui dois modos instáveis e exibe uma baixa largura de faixa na sua resposta a comandos [39].

5.3.1 Modelagem das Incertezas

O modelo (5.1) representa o sistema nominal onde não estão consideradas as diversas fontes de incerteza presentes no sistema físico. Vamos considerar aqui três fontes de incerteza, que serão analisadas a seguir³:

²As matrizes correspondentes estão detalhadas no apêndice E, assim como os fatores de escala utilizados.

³O objetivo deste capítulo é apenas ilustrar a utilização das técnicas estudadas; uma abordagem realista do controle do sistema físico sob consideração deveria incorporar o modelo não linear, incluir a análise de outras fontes de incerteza (modos flexíveis da fuselagem, variações da densidade do ar, erros estimados dos algoritmos de identificação, etc.), e uma quantificação experimental de suas grandezas.

Incerteza paramétrica devida ao peso

A dinâmica do helicóptero é influenciada pela variação do peso total, o qual está relacionado, entre outros fatores, ao consumo de combustível. As matrizes da representação de estados vão ter seus coeficientes dependentes do peso. Aproximando em forma linear essa dependência, vamos ter o seguinte modelo incerto:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + A_p \delta_p)x + (B + B_p \delta_p)l \\ s = Cx \end{cases} \quad \delta_p \in \mathfrak{R}, |\delta_p| < 1 \quad (5.2)$$

As matrizes A_p e B_p foram obtidas a partir de um conjunto de modelos calculados em diferentes condições de operação assumindo uma variação total de 15% em torno do peso nominal [44].

Incerteza nos atuadores

Os atuadores possuem tipicamente uma dinâmica apreciavelmente mais rápida que a do helicóptero, e não será, portanto, incluída no modelo nominal. Porém, essa dinâmica será considerada no modelo incerto da seguinte forma:

$$\mathcal{G}_a(s) = [I + W_a(s)\Delta_a] \quad (5.3)$$

$$W_a(s) = \frac{0.1s}{s + 60}I$$

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} \delta_{a1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{a2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{a3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{a4} \end{bmatrix}; \quad \delta_{ai} \in \mathcal{C}, |\delta_{ai}| < 1 \quad (5.4)$$

O perfil freqüencial da incerteza, dado por W_a reflete um modelo perfeitamente conhecido nas baixas freqüências, e parcialmente desconhecido em freqüências maiores. A estrutura diagonal advém do fato de que os quatro atuadores são independentes, e suas incertezas não estão correlacionadas.

Incerteza nos sensores

É assumida uma incerteza dinâmica de 10 % na medida dos sinais de realimentação:

$$\mathcal{G}_s(s) = [I + W_s(s)\Delta_s] \quad (5.5)$$

$$W_s(s) = 0.1I$$

$$\Delta_s = \text{diag}\{\delta_{s1}, \dots, \delta_{s6}\}; \quad \delta_{si} \in \mathcal{C}, |\delta_{si}| < 1 \quad (5.6)$$

O modelo do sistema incerto está descrito no diagrama em blocos da figura 5.2. O mesmo pode ser representado mais esquematicamente pela interconexão fracionária linear indicada na figura 5.3. G_p denota a planta generalizada, produto da adição dos perfis de incerteza W_s , W_a , A_p e B_p ao modelo nominal do helicóptero. A saída s denota as saídas a serem controladas, enquanto v representa o resultado da medição das mesmas com uma certa margem de incerteza, ponderada no modelo (5.5).

A incerteza Δ_i tem a seguinte estrutura:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \Delta_a & & \\ & \Delta_s & \\ & & \delta_p I \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

onde δ_p , Δ_a , e Δ_s estão definidos em (5.2), (5.4) e (5.6) respectivamente, como os blocos associados à incerteza nos diversos componentes do sistema.

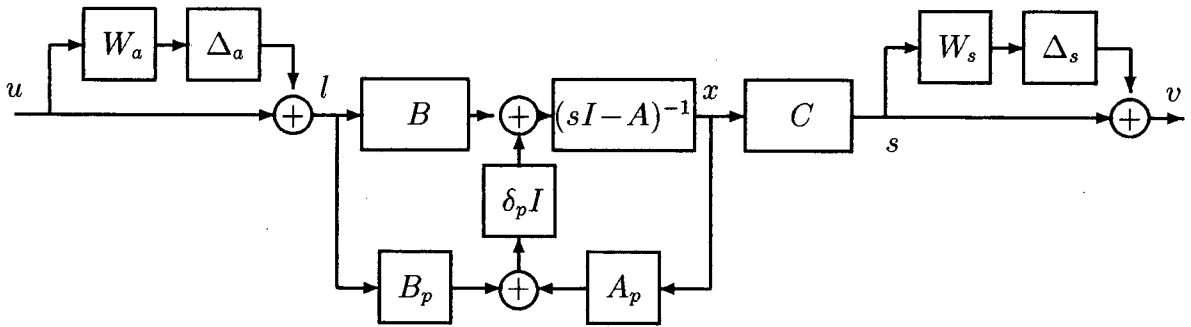


Figura 5.2: *Modelo Incerto do Helicóptero*

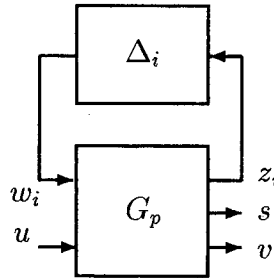


Figura 5.3: *Modelo Incerto na Forma Canônica*

5.3.2 Especificações de Desempenho

Os requisitos de desempenho para helicópteros estão padronizados de acordo com a finalidade do mesmo (militar, de transporte, de observação, etc.) e do regime de vôo sendo considerado [43, 69].

De acordo com as características do modelo adotado para vôo pairado, a seguir é listado o conjunto de requisitos de desempenho que deseja-se atingir com o projeto:

Tipo de resposta em *pitch* e *roll*: O sistema deve responder aos comandos do piloto com um deslocamento de *atitude*. Mais precisamente, a atitude da aeronave nesses eixos deve retornar a menos de 10 % do valor de pico dentro dos 10 segundos posteriores à aplicação de um impulso no comando correspondente.

Tipo de resposta em *heave* e *yaw*: A resposta deve ser *em velocidade*, isto é, a atitude deve divergir após um comando em degrau por parte do piloto.

Largura de faixa Devem ser respeitadas as seguintes larguras de faixa para cada movimento:

$$\text{pitch : } \omega_{BW} > 2.0 \text{ rad/s}$$

$$\text{roll : } \omega_{BW} > 3.5 \text{ rad/s}$$

$$\text{yaw : } \omega_{BW} > 3.5 \text{ rad/s}$$

Amortecimento Deve ser $\xi > 0.35$.

Acoplamento pitch-roll O valor de pico em *roll* como resposta a um comando degrau em *pitch*, não deve exceder do 25% do pico em *pitch* durante os primeiros 4 segundos. E vice-versa.

Os conceitos de largura de faixa e amortecimento estão definidos nos padrões mencionados [39, 43, 69]. Deve-se notar que esses requisitos implicam restrições na resposta transitória (até 4 ou 10 segundos) e não sobre a resposta em regime. Isto, embora possa parecer estranho à primeira vista, é consequência de que a missão considerada é o voo pairado. Qualquer comando do piloto de tipo degrau origina em regime um movimento que afasta-se obviamente da condição de voo pairado.

Por esses motivos, é costumeiro para os especialistas em aeronáutica, utilizar como sinal de teste um pulso de 4 ou 5 segundos de duração [10, 39, 53, 69].

5.4 Projeto mediante μ -Síntese

O controlador a ser projetado deve satisfazer os requisitos de desempenho acima, frente às incertezas e variações presentes no modelo. Dado que as especificações envolvem restrições sobre a resposta a comandos, é conveniente utilizar um controlador de dois graus de liberdade. Este tipo de controlador tem sido usado freqüentemente em controle de helicópteros [23, 39, 50, 70].

Como primeiro passo no processo de síntese vamos obter um modelo de referência M que satisfaça as especificações de desempenho. A partir dos requisitos da seção 5.3.2 propomos um sistema de ordem 6, com seus modos completamente desacoplados, cuja resposta é dada por

$$\frac{\theta}{\theta_c} = \frac{\omega_\theta^2}{s^2 + 2\xi\omega_\theta s + \omega_\theta^2}; \quad \frac{\phi}{\phi_c} = \frac{\omega_\phi^2}{s^2 + 2\xi\omega_\phi s + \omega_\phi^2}$$

$$\frac{r}{r_c} = \frac{\lambda_r}{s + \lambda_r}; \quad \frac{w}{w_c} = \frac{\lambda_w}{s + \lambda_w}$$

com os seguintes parâmetros:

$$\xi = 0.707$$

$$\omega_\theta = \omega_\phi = \sqrt{8} \text{ rad/s}$$

$$\lambda_r = \lambda_w = 4 \text{ rad/s}$$

As larguras de faixa resultantes são de 5.46 rad/s para *pitch* e *roll* e de 4 rad/s para *yaw* e *heave*⁴.

A estrutura de interconexão usada para a síntese é ilustrada na figura 5.4. No bloco W vamos ponderar mais fortemente a faixa na qual a resposta do sistema é significativa:

$$W(s) = \text{diag}\{h_w(s), 1, 1, h_w(s), h_w(s), h_w(s)\}$$

$$h_w(s) = \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} \frac{s^2 + \sqrt{2}\omega_z s + \omega_z^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_p s + \omega_p^2}$$

$$\omega_z = 0.05 \text{ rad/s}; \quad \omega_p = 0.158 \text{ rad/s}$$

A resposta em frequência do filtro de ponderação $h_w(s)$ pode ser vista na figura 5.9.b.

Como resulta do exame da figura 5.9.b, na síntese foi ponderada fortemente a faixa $\omega > .1 \text{ rad/s}$. O problema consiste em determinar um controlador que garanta a estabilidade robusta e minimize $\|T_{zr}\|_\infty$ no pior caso do conjunto de incertezas Δ_i . Esse critério de desempenho pondera a diferença respeito do comportamento desejado na faixa de frequências de nosso interesse, no sentido da norma \mathcal{H}_∞ .

Como foi mostrado na seção 2.4.3, esse problema de desempenho robusto é equivalente ao de estabilidade robusta para o diagrama de interconexão da figura 5.5 em que o bloco incerto Δ possui a seguinte estrutura ampliada:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_d & \\ & \Delta_i \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

⁴Para sistemas de segunda ordem ω_{BW} é calculada como a frequência na que a fase atinge 135 graus [43].

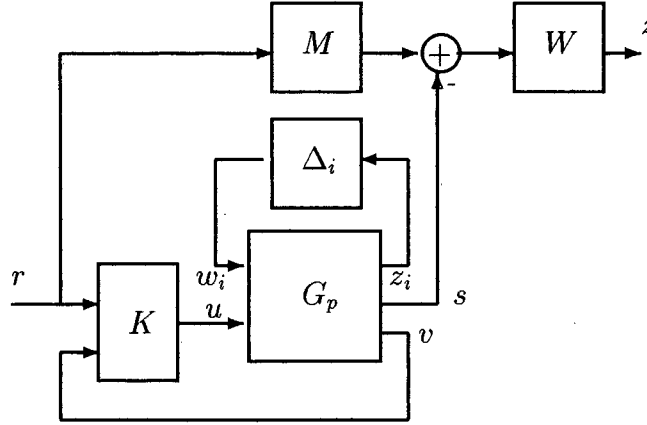


Figura 5.4: *Esquema de Interconexão para μ -Síntese*

$\Delta_d \in \mathcal{C}^{6 \times 6}$ representa o bloco de incerteza fictícia associada ao problema de desempenho; Δ_i está definida em (5.7). A planta generalizada G inclui, além do sistema G_p , os blocos M e W . Os sinais y , z_t e w_t definem-se como:

$$y = \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}; \quad z_t = \begin{bmatrix} z \\ z_i \end{bmatrix}; \quad w_t = \begin{bmatrix} r \\ w_i \end{bmatrix}$$

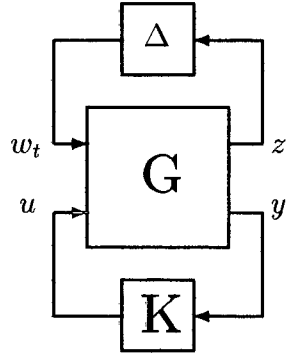


Figura 5.5: *Esquema de Interconexão Padrão para μ -Síntese*

Devemos determinar um controlador que minimize $\|\mathcal{F}_l(G, K)\|_\mu$, onde μ deve ser calculado com relação à estrutura de incerteza dada por (5.8). O algoritmo de síntese escolhido é a iteração \mathcal{D} - \mathcal{K} com *scaling* constante descrito na seção 3.3.2. Como foi mencionado anteriormente, a utilização de *scalings* constantes pode ser potencialmente conservativa. Porém suas boas características do ponto de vista de cálculo e o fato de obter um controlador de ordem razoável o tornam atraente para nossa aplicação. Em geral, a sua conveniência como ferramenta de síntese dependerá da exata natureza das incertezas e perturbações agindo sobre o sistema.

Foram suficientes três iterações para obter um controlador de desempenho aceitável, que chamaremos de K_1 . Usando uma notação similar à do capítulo 4, vamos considerar a

representação no espaço de estados de K_1 :

$$K_1(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_F & B_{1r} & B_{Fv} \\ \hline C_F & D_{1r} & D_v \end{array} \right] \quad (5.9)$$

O prefiltro e o controlador realimentado associados a K_1 são dados por:

$$P_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_{1r} \\ \hline C_F & D_{1r} \end{array} \right]; F_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_{Fv} \\ \hline C_F & D_v \end{array} \right] \quad (5.10)$$

5.4.1 Análise de Desempenho

Vamos analisar o sistema controlado mediante o controlador K_1 do ponto de vista de sua robustez e com relação ao desempenho do modelo nominal.

Robustez

Dada a característica estruturada das incertezas, a ferramenta de análise de robustez é, naturalmente, μ . A estrutura de incerteza compreende um bloco $\delta_p I$, que representa uma variação paramétrica *real*, e não complexa. Porém, devido às dificuldades envolvidas no cálculo de μ para esse tipo de problemas mistos a análise será feita considerando $\delta_p \in \mathcal{C}$. Nesse sentido os resultados a seguir podem ser algo conservativos.

Para o caso do **desempenho robusto**, foi calculado

$$\mu_{DR}(j\omega) = \mu(\mathcal{F}_l[G(j\omega), K_1(j\omega)])$$

com relação à estrutura dada em (5.8). Na figura 5.7.a estão representados os limites superior e inferior, que no caso são muito próximos, o que permite ter uma estimativa de μ muito boa.

Pode se apreciar que o valor de pico é de aproximadamente $\|\mathcal{F}_l[G, K_1]\|_\mu = 0.68$. Isso é equivalente a garantir, com relação à figura 5.4:

$$\|T_{zr}\|_\infty < 0.68; \quad \forall \|\Delta_i\|_\infty < 1/0.68$$

Alternativamente, esses dados podem ser interpretados da seguinte maneira: se considerarmos apenas entradas de referência senoidais, a diferença entre o comportamento desejado e o de alguns membros da família de modelos para $\|\Delta_i\|_\infty < 1/0.68$ pode ser de até 68 %.

Esse resultado pode ser satisfatório, devido a que a diferença entre o comportamento desejado e o obtido não é excessivo.

Para a análise da **estabilidade robusta** deve-se considerar o sistema da figura 5.6, que não inclui os blocos de desempenho. A parcela de K_1 correspondente ao prefiltro não influi

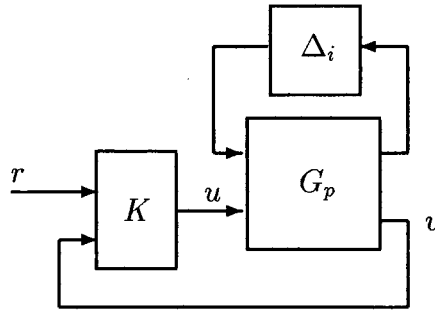


Figura 5.6: *Análise de Estabilidade Robusta*

na estabilidade robusta do sistema; esta dependerá unicamente do controlador realimentado F_1 .

A análise da estabilidade robusta é feita através de

$$\mu_{ER}(j\omega) = \mu(\mathcal{F}_l[G_p(j\omega), F_1(j\omega)])$$

calculado com relação à estrutura Δ_i . $\mu_{ER}(j\omega)$ pode ser estimado a partir de seus limites indicados na figura 5.7.b.

Note-se o valor de pico de aproximadamente 0.2, o que garante a estabilidade para toda perturbação tal que $\|\Delta_i\|_\infty < 5$. É importante destacar que essa informação não poderia ter sido obtida a partir da figura 5.7.a.

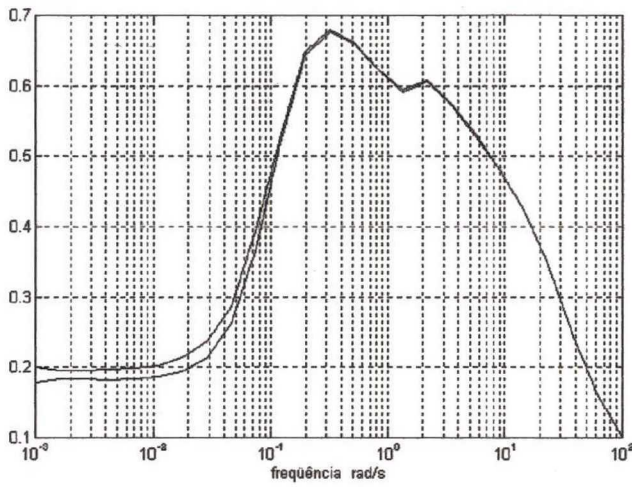
Desempenho Nominal

A figura 5.7.c ilustra a resposta em frequência correspondente aos canais de *pitch* e *roll*, e na figura 5.7.d pode-se apreciar a resposta em *yaw*. Sobre os mesmos gráficos podem ser apreciadas, em tracejado, as respostas do modelo de referência.

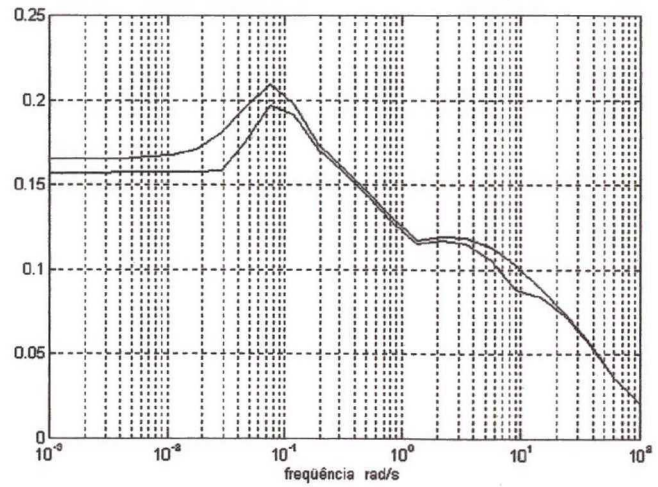
Foram obtidas as respostas temporais ao degrau unitário nos canais *roll* e *pitch*. As mesmas estão mostradas nas figuras 5.7.e e 5.7.f respectivamente, e incluem as respostas em posição e em velocidade. A resposta ideal está representada em linha pontilhada.

Da análise da figura 5.7.c, resulta um desempenho nominal insatisfatório, devido especialmente, à pobre resposta em *roll* na década $.1 \text{ rad/s} < \omega < 1 \text{ rad/s}$. Isso também é observável nas respostas temporais das figuras 5.7.e e 5.7.f onde a resposta extingue-se rapidamente. A largura de faixa, porém, é aceitável; observe-se que o tempo de resposta é similar ao do modelo de referência. O acoplamento entre modos é de 15% aproximadamente.

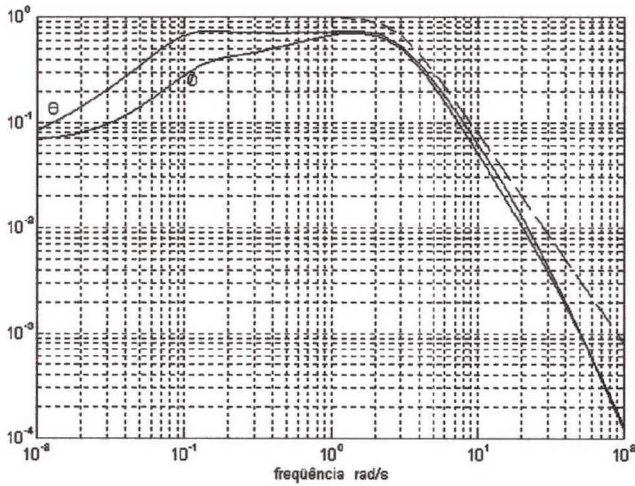
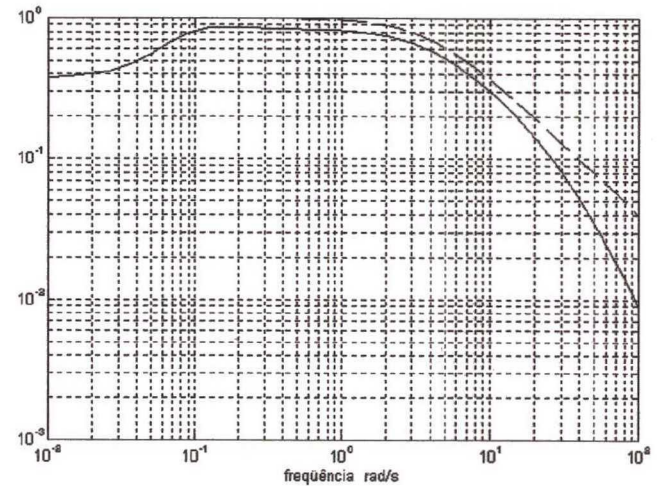
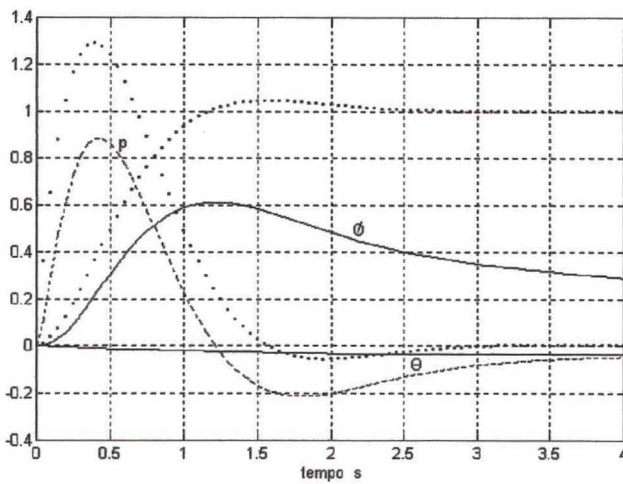
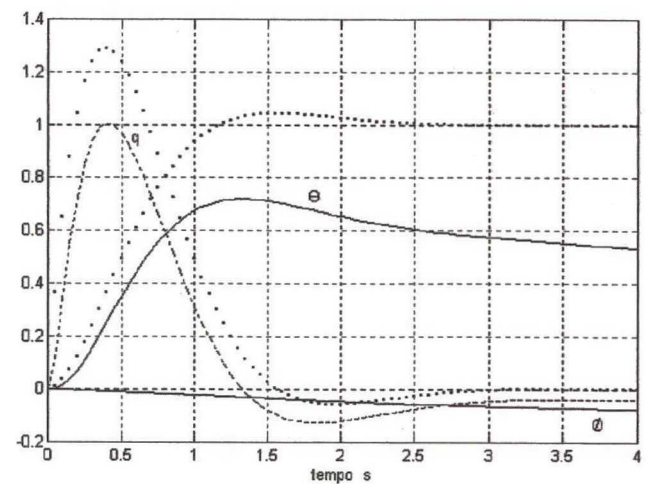
Sumariamente, pode-se dizer respeito do controlador K_1 , que possui uma aceitável robustez, especialmente em relação com a estabilidade, mas seu desempenho nominal é insatisfatório.



(a) Desempenho Robusto



(b) Estabilidade Robusta

(c) Resposta em *pitch* e *roll*(d) Resposta em *yaw*(e) Resposta ao degrau em *roll*(f) Resposta ao degrau em *pitch*Figura 5.7: Análise em Malha Fechada para o Controlador K_1

μ -síntese via *scaling* constante

Como já foi discutido na seção 3.3.2, a potencial conservatividade dos *scalings* constantes como ferramentas de síntese está relacionada com a desigualdade

$$\mu(j\omega) < \min_{D(j\omega) \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(D(j\omega)\mathcal{F}_l[G(j\omega), K(j\omega)]D^{-1}(j\omega)) < \min_{D_c \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(D_c\mathcal{F}_l[G(j\omega), K(j\omega)]D_c^{-1})$$

A figura 5.8 mostra o segundo e o terceiro membro da desigualdade acima para o controlador K resultante do segundo passo na iteração \mathcal{D} - \mathcal{K} , prévio de K_1 . A estrutura de incerteza associada é Δ , correspondente ao problema de desempenho robusto. O cálculo dos *scalings* $D(j\omega_i)$ foi realizado em 25 pontos logaritmicamente espaçados.

Neste caso, com relação ao valor máximo, a diferença entre ambos limites não ultrapassa 5 %. Porém a diferença é muito importante em baixas frequências.

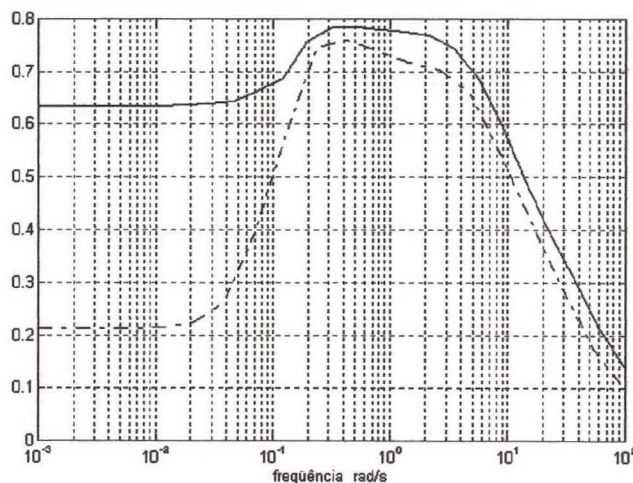


Figura 5.8: Análise Comparativa do Cálculo de μ via "Scaling" Constante

5.5 Projeto do Prefiltro

Enquanto as propriedades que envolvem unicamente a malha realimentada do controlador K_1 (especificamente, a estabilidade robusta) satisfazem os requisitos, aquelas ligadas à ação do prefiltro não são satisfatórias. Isto se deve ao fato de se ter adotado como índice de desempenho a norma \mathcal{H}_∞ da diferença entre o comportamento desejado e o atingível pelo controlador.

Com esse projeto estamos certos de que o comportamento *no pior caso*, é o melhor possível. Mas ao analisar a resposta restringimos nossa análise a entradas do tipo degrau.

Percebemos, então, que neste caso, a abordagem pode ter sido em excesso pessimista. Como foi discutido no capítulo 4, quando as perturbações (no nosso caso, entradas de referência) pertencem a um conjunto restrito de sinais de teste, a norma \mathcal{H}_2 pode fornecer melhores resultados.

Essa discussão fundamenta a necessidade de projetar o prefiltro mediante técnicas \mathcal{H}_2 , enquanto que seria desejável manter as propriedades robustas garantidas pela parcela realimentada de K_1 . Com estes fins, vamos utilizar a técnica respectiva apresentada na seção 4.4 para reprojetar as matrizes B_{1r} e D_{1r} do controlador K_1 em (5.9).

Vamos sintetizar, então, um novo controlador de dois graus de liberdade, que chamaremos de K_2 , que possui a mesma parcela realimentada de K_1 , com a estrutura seguinte:

$$K_2(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_F & B_{2r} & B_{Fv} \\ \hline C_F & D_{2r} & D_v \end{array} \right] \quad (5.11)$$

onde B_{2r} e D_{2r} são os parâmetros do controlador a serem determinados.

Para construir o esquema de *model following* da figura 4.4 escolhemos os mesmos modelos M e W da μ -síntese. Ao aplicar para essa estrutura de interconexão, a técnica de projeto em \mathcal{H}_2 da seção 4.4.2, estamos procurando aqueles parâmetros do prefiltro que minimizam a diferença com o comportamento desejado no sentido \mathcal{H}_2 , na faixa de frequências de nosso interesse.

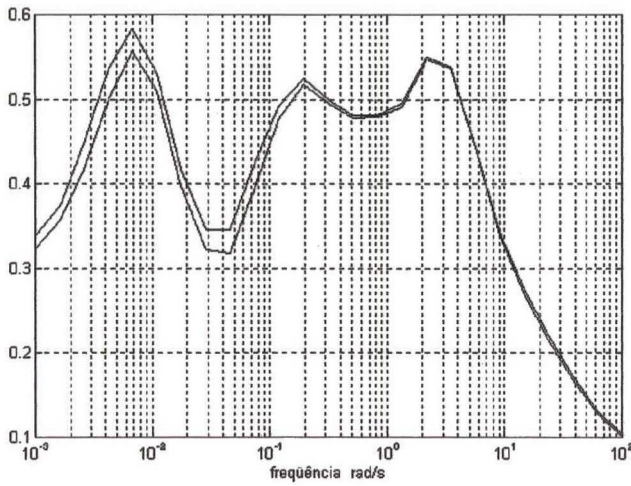
5.5.1 Análise de Desempenho

Excetuando a estabilidade robusta, que independe do prefiltro, foi realizada a mesma bateria de testes na análise das propriedades robustas e nominais. A figura 5.9 inclui os resultados obtidos.

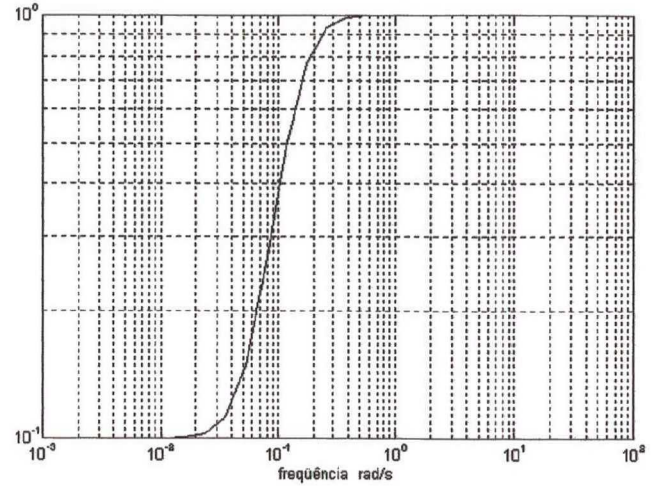
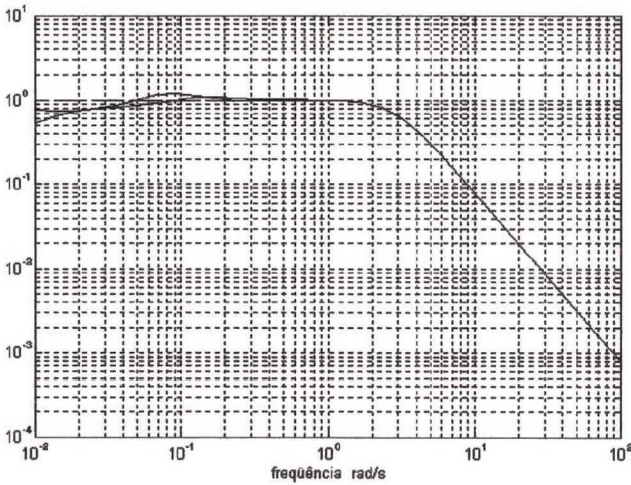
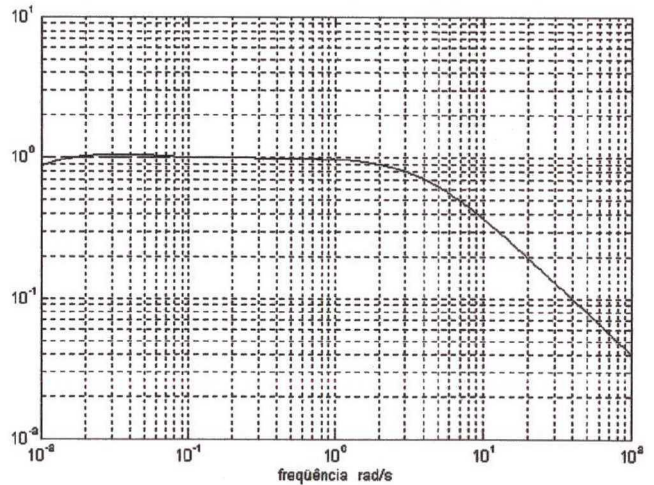
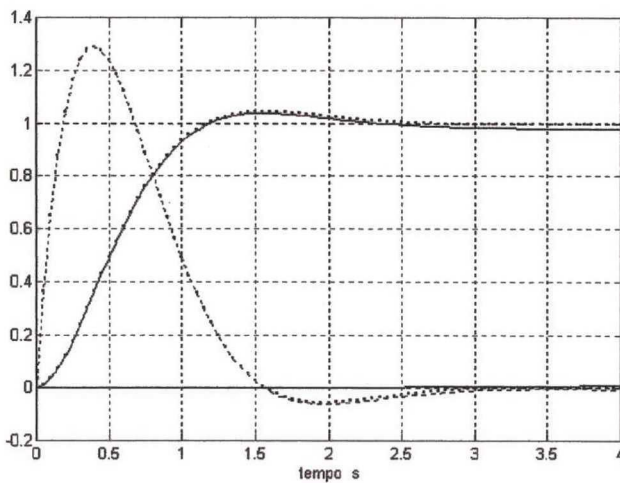
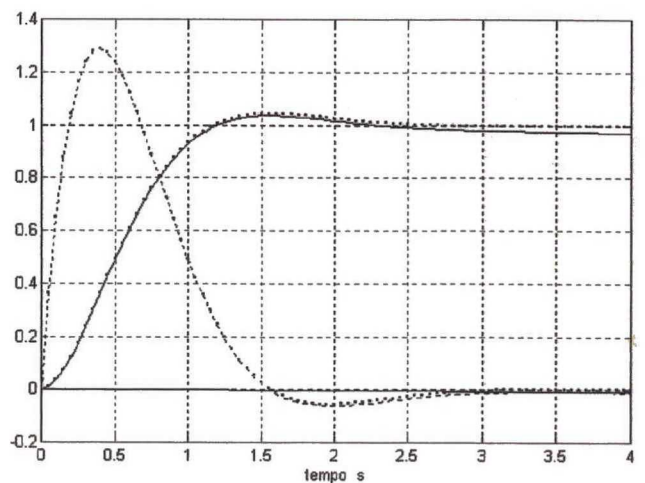
Da análise conjunta das figuras 5.7.a e 5.9.a pode-se observar que K_2 possui um melhor desempenho robusto do que K_1 . Isto não é um resultado previsível. Na síntese de K_2 apenas são otimizados os parâmetros do prefiltro com relação ao desempenho nominal, utilizando a norma \mathcal{H}_2 . Porém, o resultado obtido simplesmente ressalta a subotimalidade do controlador projetado via *scalings* constantes, especialmente com relação aos requisitos de desempenho.

A resposta nominal nos canais *roll*, *pitch* e *yaw*, mostradas nas figuras 5.9.c-f exibe um comportamento muito próximo do desejado. Os acoplamentos entre modos não são observáveis.

Logo, o controlador K_2 garante um desempenho satisfatório tanto em relação ao sistema nominal, quanto em relação à robustez.



(a) Desempenho Robusto

(b) Filtro de ponderação $h_w(s)$ (c) Resposta em *pitch* e *roll*(d) Resposta em *yaw*(e) Resposta ao degrau em *roll*(f) Resposta ao degrau em *pitch*Figura 5.9: Análise em Malha Fechada para o Controlador K_2

5.6 Conclusão

Este capítulo apresentou a aplicação de várias das técnicas introduzidas anteriormente.

Foi construído um modelo incerto descrito na sua formulação canônica, a partir das incertezas e variações individuais de seus componentes. O primeiro projeto do controlador de dois graus de liberdade foi realizada mediante a μ -síntese, e seus resultados analisados por meio do μ com relação às duas estruturas de incerteza correspondentes à estabilidade e ao desempenho robusto, respectivamente.

Foi destacada a relação entre cada parcela do controlador e as respectivas propriedades estudadas na análise, elemento fundamental no projeto de controladores de dois graus de liberdade. Foram ressaltadas as diferenças entre as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no tratamento das entradas de referência e sua influência no desempenho obtido. Com base nessa discussão, foi fundamentada a utilidade das técnicas de projeto propostas originalmente no capítulo 4, a qual foi confirmada pela análise feita *a posteriori*.

O modelo matemático dado pela equação (5.1), foi obtido mediante a linearização da dinâmica extremamente não linear do helicóptero em torno de um ponto de operação. Portanto, esse modelo é apenas válido nas vizinhanças do vôo pairado. Ao mesmo tempo, a dependência da dinâmica do helicóptero com relação às variações do peso é levada em conta unicamente com o objetivo de considerá-la como outra fonte de incerteza.

Porque então não considerarmos a velocidade de deslocamento e o peso total do helicóptero como parâmetros variantes no tempo, capazes de serem medidos continuamente? Nesse caso, seríamos capazes de assegurar um dado desempenho para uma região de operação mais ampla, e a medida desses parâmetros poderia ser utilizada para "sintonizar" automaticamente o controlador durante a operação do mesmo.

A resposta a essa pergunta é imediata: o sistema não seria linear e invariante no tempo, hipótese primeira de toda a teoria estudada. Porém, essa pergunta sugere uma linha de pesquisa em controle robusto de enorme interesse que está se desenvolvendo atualmente: a extensão das técnicas de controle em \mathcal{H}_∞ para uma classe de sistemas não lineares ou variantes no tempo, conhecidos por sistemas LPV [5, 6, 7, 12, 13, 55, 65, 66, 67].

Conclusão Geral

O objetivo deste trabalho pode ser resumido nos seguintes pontos:

- estudo das bases matemáticas da teoria de controle robusto;
- caracterização e modelagem de sistemas lineares incertos;
- estudo das ferramentas de análise correspondentes;
- estudo de metodologias de síntese de controladores robustos;
- utilização desses conceitos em um exemplo de aplicação.

Com esse intuito, o primeiro capítulo trata das normas de sinais e de sistemas, e da modelagem de sistemas incertos. O conceito de norma é fundamental para a caracterização das perturbações e das incertezas presentes no sistema. Foi destacado o papel das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ como critério de desempenho e ferramenta de análise. Pôs-se ênfase sobre a relação entre ambas normas e a correspondente caracterização das perturbações. A incorporação explícita da incerteza no modelo do sistema constitui um dos principais aportes da teoria de controle robusto, e é a base de toda a teoria.

O segundo capítulo trata da análise das propriedades dos sistemas incertos definidos no capítulo 1. Foi estudado o papel da norma \mathcal{H}_∞ na análise do desempenho nominal e da estabilidade robusta frente a incertezas não estruturadas. No caso de incertezas estruturadas a ferramenta de análise mais adequada é o valor singular estruturado, μ do qual estudamos suas principais propriedades e metodologias de cálculo.

A síntese de controladores foi o tópico do capítulo 3. Foram abordados os problemas padrão de controle em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e a μ -síntese. Enquanto os primeiros admitem uma solução analítica em função de duas equações de Riccati, o problema da μ -síntese só pode ser resolvido de forma iterativa e aproximada. Discutimos duas técnicas de solução, relacionadas com a dependência freqüencial das matrizes de *scaling* respectivas. Destacou-se a possibilidade de

expressar alguns destes problemas como LMIs, as quais podem ser resolvidas eficientemente mediante algoritmos de otimização convexa.

O capítulo 4 inclui uma classificação dos requisitos de desempenho em duas categorias, cada uma relacionada com um tipo particular de ação de controle. Quando devem ser atendidos requisitos de ambas classes a estrutura do controlador mais adequada é aquela conhecida por "controlador de dois graus de liberdade", que compreende a realimentação e a ação *feed-forward* do prefiltro. Foram discutidas várias técnicas de projeto sob diversos pontos de vista, tais como a complexidade do controlador, a possibilidade de projetar separadamente cada ação de controle, e o índice de desempenho utilizado em cada caso. Nesse contexto foram propostas duas metodologias de projeto para uma classe de controladores, que constituem uma contribuição do presente trabalho.

Por último, algumas dessas técnicas foram aplicadas no capítulo 5 a um exemplo. O mesmo trata do controle de um helicóptero em voo pairado. O controlador foi projetado mediante μ -síntese e a técnica em \mathcal{H}_2 proposta no capítulo 4. O desempenho do sistema resultante foi analisado usando μ para o sistema incerto, e mediante técnicas clássicas para o sistema nominal. Foi destacada a correspondência entre cada ação de controle e as propriedades analisadas, discussão que fundamenta a utilidade das técnicas de projeto propostas.

Dos resultados obtidos com a presente dissertação desprendem-se algumas direções para futuras pesquisas.

Uma delas está relacionada com a utilização de técnicas mistas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ no projeto dos parâmetros do prefiltro. Tais técnicas são capazes de atingir um desempenho ótimo em \mathcal{H}_2 garantindo um nível dado de rejeição de distúrbios no sentido \mathcal{H}_∞ .

O fato de que as técnicas estudadas ao longo deste trabalho tenham sido desenvolvidas para sistemas lineares é, ao mesmo tempo, uma fortaleza e uma debilidade. O primeiro aspecto foi ilustrado ao longo desta dissertação. O segundo insinuou-se à hora de abordar o controle do helicóptero operando em um *dado* ponto de operação. Para contornar essa limitação é necessário obter um modelo não linear do helicóptero podendo ser aplicadas posteriormente técnicas de controle robusto para sistemas LPV. Esta constitui uma linha de pesquisa e uma proposta de trabalho futuro de singular importância.

Bibliografia

- [1] R. ADAMS, S. BANDA - *Robust Flight Control Design using Dynamic Inversion and Structured Singular Value Synthesis*, IEEE Trans. on Control Systems Technology, v. 1, n. 2, Jun 1993.
- [2] P. APKARIAN, C. CHAMPETIER, J.F. MAGNI - *Design of a Helicopter Output Feedback control Law using Modal and Structures-Robustness techniques*, Int. Journal of Control, v. 50, n. 4, 1989.
- [3] P. APKARIAN, C. SAMBLANCAT, L. LE LETTY, R. PATTON - *A Two-Feedbacck-Loop Robust Helicopter Controller Based on Eigenspace Techniques and \mathcal{H}_∞ Synthesis*, IEEE Proc. of the 29th Conf. on Decision and Control, Dec 1990.
- [4] P. APKARIAN, J.P. CHRETIEN, P. GAHINET, J.M. BIANNIC - *μ Synthesis by $\mathcal{D} - \mathcal{K}$ Iterations with Constant Scaling*, Proc. of the European Control Conference, 1993.
- [5] P. APKARIAN, P. GAHINET, G. BECKER - *Self-Scheduled H -infinity Control of Linear Parameter-Varying Systems*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [6] P. APKARIAN, P. GAHINET, G. BECKER - *Control of Linear Parameter-Varying Systems: A Design Example*, submetido a Automatica, 1994.
- [7] P. APKARIAN, P. GAHINET - *A Convex Characterization of Parameter-Dependent Controllers*, submetido a IEEE Trans. on Automatic Control, 1995.
- [8] G. BALAS, J. DOYLE, K. GLOVER, A. PACKARD, R. SMITH - *μ -Analysis and Synthesis Toolbox*, MuSyn Inc. and The MathWorks Inc., 1991.
- [9] C. BECK - *Computational Issues in Solving LMIs*, IEEE Proc. of the 30th Conf. on Decision and Control, Dec 1991.
- [10] P. BENDOTTI, J.C. MORRIS - *Identification and Stabilization of a Model Helicopter in Hover*, submetido a the American Control Conference, 1995.

- [11] D. S. BERNSTEIN, W.M. HADDAD - *LQG Control with an \mathcal{H}_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approach*, IEEE Trans. on Automatic Control, v. 34, n. 3, 1989.
- [12] B. BODENHEIMER, P. BENDOTTI - *Optimal Linear Parameter-Varying control Design for a Pressurized Water Reactor*, submetido a the 34th IEEE Conference on Decision and Control, Dec 1995.
- [13] B. BODENHEIMER, P. BENDOTTI, M. KANNTNER - *Linear Parameter-Varying Control of a Ducted Fan Engine* submetido a The Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Jan 1995.
- [14] S. BOYD, Q. YANG - *Structured and Simultaneous Lyapunov Functions for System Stability Problems*, Int. Journal of Control, v. 49, n. 6, 1989.
- [15] S. BOYD, C. BARRATT - *Linear Controller Design, Limits of Performance*, Prentice Hall, 1991.
- [16] S. BOYD, L. EL GHAOU, E. FERON, V. BALAKRISHNAN - *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1993.
- [17] S. BOYD, L. VANDERBERGHE, M. GRANT - *Efficient Convex Optimization for Engineering Design*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [18] S. BOYD, L. EL GHAOU, E. FERON, V. BALAKRISHNAN - *History of Linear Matrix Inequalities in Control Theory*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [19] A.R.S BRAMWELL - *Helicopter Dynamics*, Edward Arnold, 1976.
- [20] J. BU, M. SZNAIER, I. BARTARSEH, Z-Q WANG - *Robust Control Design for a Parallel Resonant Converter using μ -Synthesis*, IEEE Power Electronics Specialists Conference, 1994.
- [21] R.Y. CHIANG, M.G. SAFONOV - *Real K_m Synthesis via Generalized Popov Multipliers*, Proc. of the American Control Conference, 1992.
- [22] M. CHILALI, P. GAHINET - *\mathcal{H}_∞ Design with an α -Stability Constraint: an LMI Approach*, IFAC Symposium on Robust Control Design, 1993.
- [23] U. CHRISTEN, M.F. WEILENMANN, H.P. GEERING - *Design of \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Controllers with Two Degrees of Freedom*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [24] R.L. DAILEY - *Lecture Notes for the Workshop on \mathcal{H}_∞ and μ Methods for Robust Control*, IEEE Conf. on Decision and Control, 1991.

- [25] S.R. De SOUZA - *Análise Convexa Aplicada a Sistemas Dinâmicos Contínuos*, Tese de Doutorado, Laboratório de Análise Convexa, F.E.E., UNICAMP, 1994.
- [26] P. DORATO - *Robust Control*, IEEE Press, New York, 1987.
- [27] J. DOYLE, G. STEIN - *Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis*, IEEE Trans. on Automatic Control, v AC-26, n 1, Feb 1981.
- [28] J. DOYLE - *Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties*, Proc of the I.E.E., Pt D, 129, Nov 1982.
- [29] J. DOYLE - *Structured Uncertainty in Control System Design*, IEEE Proc. of the 24th Conf. on Decision and Control, Dec 1985.
- [30] J. DOYLE, K. GLOVER, P.P. KHARGONEKAR, B.A. FRANCIS - *State-Space Solutions to Standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Control Problems*, IEEE Trans. on Automatic Control, v. 34, n. 8, Aug 1989.
- [31] J. DOYLE, B. FRANCIS, A. TANNENBAUM - *Feedback Control Theory*, Macmillan, 1990.
- [32] J. DOYLE, A. PACKARD, K. ZHOU - *Review of LFTs, LMIs, and μ* , IEEE Proc. of the 30th Conf. on Decision and Control, Dec 1991.
- [33] L. EL GHAOU, P. GAHINET - *Rank Minimization under LMI Constraints: a Framework for Output Feedback Problems*, Proc. of the European Control Conference, 1993.
- [34] A. FISCHMAN - *Controle Robusto de Sistemas Lineares Incertos - Teoria e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Laboratório de Controle e Microinformática, D.E.E., UFSC, 1993.
- [35] P. GAHINET, A. NEMIROVSKII - *LMI Lab: A Package for Manipulating and Solving LMI's*, Version 2.0, Aug 1993.
- [36] P. GAHINET, P. APKARIAN - *A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control*, Int. J. Robust Nonlinear Contr., Special Issue on H_∞ Control, 1993.
- [37] P. GAHINET - *Explicit Controller Formulas for LMI-based H_∞ Synthesis*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [38] F. GARCIA SANTORO - *Aplicação da Técnica de Atribuição da Auto-estrutura Completa no Projeto de Sistema Reguladores e Controladores de Vôo de Helicópteros*, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1992.

- [39] W.L. GARRARD, E. LOW and S. PROUTY - *Design of Attitude and Rate Command Systems for Helicopters Using Eigenstructure Assignment*, J. of Guidance Control and Dynamics, v 12, n 6, Nov-Dec 1989.
- [40] J.C. GEROMEL, J. BERNUSSOU, P.L.D. PERES - *Stabilizability of Uncertain Linear Systems Via Linear Programming*, IEEE Proc. of the 27th Conf. on Decision and Control, Dec 1988.
- [41] A. GIUSTO, A. TROFINO, E. DE BONA CASTELAN - \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 Design Techniques for a Class of Prefilters, submetido ao 34th Conf. on Decision and Control, 1995.
- [42] A. GIUSTO - *Aplicação da Teoria \mathcal{H}_∞ ao Projeto de Sistemas de Controle*, Nota Técnica LCMI, 1994.
- [43] J. GRIBBLE - *LQG-LTR Design for a Helicopter in Low-Speed Flight*, J. of Guidance, Control and Dynamics, v. 16, n. 4, Jul-Aug 1993.
- [44] J.J. GUIMARÃES, O. DA ROCHA NEVES Jr. - *Comunicação Pessoal*, 1994.
- [45] J.-C. JUANG, H.-H. YEH, S.S. BANDA - *Reduced Order \mathcal{H}_∞ Controller Design and Separation Principle*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [46] H. KURAOKA, N. OHKA, M. OHBA, S. HOSOE, F. ZHANG - *Application of H-infinity Design to Automotive Fuel Control*, IEEE Control Systems Magazine, Apr 1990.
- [47] H. KWAKERNAAK, R. SIVAN - *Linear Optimal Control Systems*, Wiley Interscience, 1972.
- [48] H. KWAKERNAAK - *Robust Control and \mathcal{H}_∞ Optimization. Tutorial Paper*, Automatica, v. 29, n. 2, pp 255-273, 1993.
- [49] D.J.N. LIMBEER, E.M. KASENALLY, J.D. PERKINS - *On the Design of Robust Two Degrees of Freedom Controllers*, Automatica, v. 29, n. 1, 1993.
- [50] E. LOW, W.L. GARRARD - *Design of Flight Control Systems to Meet Rotorcraft Handling Qualities Specifications*, J. Guidance Control & Dynamics, v. 16, n. 1, Jan-Feb 1993.
- [51] J.C. MORRIS, M. VAN NIEUWSTANDT, P. BENDOTTI - *Identification and Control of a Model Helicopter in Hover*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [52] A.A. NICHOLSK - *Helicopter Analysis*, New York, John Wiley, 1951.

- [53] S. OSDER, D. CALDWELL - *Design and Robustness Issues for Highly Augmented Helicopter Controls*, J. Guidance, Control & Dynamics, v. 15, n. 6, Nov-Dec 1992.
- [54] A. PACKARD, K. ZHOU, P. PANDEY, G. BECKER - *A Collection of Robust Control Problems leading to LMI's*, Proc. of the 30th Conf. on Decision and Control, Dec 1991.
- [55] A. PACKARD - *Gain Scheduling via Linear Fractional Transformations*, System and Control Letters, 22, 1994.
- [56] P.L.D. PERES, S.R. DE SOUZA, J.C. GEROMEL - *Uma Abordagem Convexa para o Problema de Controle Robusto de Sistemas Dinâmicos*, Publicação FEE n. 27/92, UNICAMP, 1992.
- [57] P.L.D. PERES, J.C. GEROMEL, S.R. DE SOUZA, - \mathcal{H}_∞ Control Design by Static Output Feedback Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [58] L. PERNEBO - *An Algebraic Theory for the Design of Controllers for Linear Multivariable Systems, Parts I and II*, IEEE Trans. on Automatic Control, v. 26, n. 1, Feb 1981.
- [59] I. POSTLETHWAITE, D.J. WALKER - *The Design of Helicopter Flight Control System using Advanced \mathcal{H}_∞ Control*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [60] R.W. PROUTY - *Helicopter Performance, Stability, and Control*, Florida, Robert E. Krieger Publishing Company, 1990.
- [61] M.G. SAFONOV - *Stability Margins of Diagonally Perturbed Multivariable Feedback Systems*, Proc. of the I.E.E., Nov 1982.
- [62] M.G. SAFONOV, D.J.N. LIMEBEER, R.Y. CHIANG - *Simplifying the \mathcal{H}_∞ Theory via Loop-Shifting, Matrix-Pencil and Descriptor Concepts*, Int. Journal of Control, v. 50, n. 6, 1989.
- [63] R. SANCHEZ PEÑA - *Introducción a la Teoría de Control Robusto*, Asociación Argentina de Control Automático, Buenos Aires, 1991.
- [64] S. SKOGESTAD, M. MORARI, J. DOYLE - *Robust Control of Ill-Conditioned Plants: High Purity Distillation*, IEEE Trans. on Automatic Control, v. 33, 1988.
- [65] J. SHAMMA, M. ATHANS - *Analysis of Gain Scheduled Control for Nonlinear Plants*, IEEE Trans. on Automatic Control, v. 35, n. 8, 1990.
- [66] J. SHAMMA, M. ATHANS - *Guaranteed Properties of Gain Scheduled Control for Linear Parameter-varying Plants*, Automatica, v. 27, n. 3, 1991.

- [67] J. SHAMMA, M. ATHANS - *Gain Scheduling: Potential Hazards and Possible Remedies*, IEEE Control Systems Magazine, v. 2, n. 3, Jun 1992.
- [68] X.D. SUN, T. CLARKE - *Robust \mathcal{H}_∞ -Based Implicit Model-Following Control of Helicopters*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [69] M. D. TAKAHASHI - *Synthesis and Evaluation of an \mathcal{H}_2 Control Law for a Hovering Helicopter*, J. Guidance, Control & Dynamics, v. 16, n. 3, May-Jun 1993.
- [70] M.F. WEILENMANN, U. CHRISTEN, H.P. GEERING - *Robust Helicopter Position Control at Hover*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [71] K.A. WISE, E.S. HAMBY - *\mathcal{H}_∞ Missile Autopilot Design With and Without Imaginary Axis Zeros*, Proc. of the American Control Conference, 1994.
- [72] M. YANO, H. IKEDA - *H-infinity Controller for the Static VAR Compensator*, IEEE Power Electronics Specialists Conference, 1994.
- [73] G. ZAMES - *Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses*, IEEE Trans. on Automatic Control, Apr 1981.
- [74] G. ZAMES - *Functional Analysis Applied to Nonlinear Feedback Systems*, IEEE Trans. on Circuit Theory, Sep 1963.

Apêndice A

Equação de Riccati

Apresentamos aqui a equação algébrica de Riccati, a qual cumpre um papel muito importante tanto no cálculo da norma \mathcal{H}_∞ quanto nos Problemas Padrão de Controle em \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 [30]. A equação algébrica de Riccati é definida como [47]:

$$A'P + PA + PBR_u^{-1}B'P - E'R_zE = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde $A, BR_uB', E'R_zE \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes dadas e R_u, R_z são matrizes reais simétricas.

Definimos a matriz hamiltoniana associada à equação (A.1) como:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR_u^{-1}B' \\ -E'R_zE & -A' \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

que possui a seguinte propriedade:

Lema A.1 *O espectro de autovalores $\Lambda(H)$ da matriz hamiltoniana H é simétrico com relação ao eixo imaginário.*

Vamos definir um conjunto de matrizes hamiltonianas de interesse na teoria de controle: aquele que garante que a equação de Riccati associada tem solução e que a matriz $A - BK$ tenha seu espectro contido em \mathcal{C}_- , para $K = R_u^{-1}B'P$. Consideremos a matriz \mathcal{X}_- formada pelos autovetores de H associados aos autovalores $\lambda \in \mathcal{C}_-$ e a seguinte partição:

$$\mathcal{X}_- = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n} \quad (\text{A.3})$$

Definição A.1 *Definimos o domínio da equação de Riccati, e o notamos $\text{Dom}(\text{Ric})$, como o conjunto de matrizes hamiltonianas H da forma (A.2) que satisfazem:*

1. *H não possui autovalores no eixo imaginário.*

2. A matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida em (A.3) é inversível.

O valor desta definição fica manifesto no seguinte lema:

Lema A.2 Se $H \in \text{Dom}(\text{Ric})$, a solução da equação de Riccati (A.1) é $P = \text{Ric}(H) = YX^{-1}$, e a matriz $A - BK$ tem espectro \mathcal{C}_- para $K = R_u^{-1}B'P$.

Demonstração:

A decomposição modal de H é dada pela expressão:

$$H \begin{bmatrix} X & W \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & W \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix}$$

$$\iff H \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Lambda$$

Multiplicando pela direita por X^{-1} :

$$H \begin{bmatrix} I \\ YX^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Lambda X^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ YX^{-1} \end{bmatrix} X \Lambda X^{-1} \quad (\text{A.4})$$

Multiplicando pela esquerda pela matriz $\begin{bmatrix} -YX^{-1} & I \end{bmatrix}$ obtemos a equação de Riccati:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -YX^{-1} & I \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} I \\ YX^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -YX^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ YX^{-1} \end{bmatrix} X \Lambda X^{-1} = 0 \\ &= A'P + PA + PBR_u^{-1}B'P - E'R_zE = 0 \end{aligned}$$

para $P = YX^{-1}$. Premultiplicando (A.4) por $\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ obtemos:

$$A - BR_u^{-1}B'P = X \Lambda X^{-1}$$

cujo espectro coincide com o de Λ , estável por construção. \square

O seguinte resultado mostra condições suficientes para verificar se um dado hamiltoniano pertence a $\text{Dom}(\text{Ric})$.

Lema A.3 Dado o hamiltoniano (A.2), com $(A, BR_u^{-1/2})$ estabilizável e $(R_z^{1/2}E, A)$ detectável, então $H \in \text{Dom}(\text{Ric})$ e $\text{Ric}(H) \geq 0$. Se for $(R_z^{1/2}E, A)$ observável, $\text{Ric}(H) > 0$.

Este é um resultado conhecido da teoria de controle ótimo que pode ser consultado em [47].

Apêndice B

Desigualdades Matriciais Lineares

Uma Desigualdade Matricial Linear (na sequência, LMI) é uma restrição do tipo:

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}_0 + x_1 \mathcal{M}_1 + \dots + x_N \mathcal{M}_N \leq 0 \quad (\text{B.1})$$

sobre o vetor $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, chamado de vetor de **variáveis de decisão** . As \mathcal{M}_i são matrizes simétricas dadas. Embora a expressão (B.1) represente a formulação canônica de uma LMI, não é a forma corrente em que este tipo de desigualdades apresentam-se em aplicações de controle. Para o nosso objetivo é mais útil considerar a formulação seguinte:

$$\mathcal{N}' \mathcal{L}(X_1, \dots, X_K) \mathcal{N} \leq \mathcal{M}' \mathcal{R}(X_1, \dots, X_K) \mathcal{M} \quad (\text{B.2})$$

- X_1, \dots, X_K são as **variáveis matriciais**. Podem possuir uma dada estrutura: bloco diagonal, simétrica, etc.
- \mathcal{N} e \mathcal{M} são matrizes constantes chamadas de **fatores externos**.
- Os **fatores internos** $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_K)$ e $\mathcal{R}(X_1, \dots, X_K)$ são matrizes simétricas com uma estrutura de blocos onde cada um destes tem uma dependência afim com as variáveis matriciais.

A LMI da forma (B.2) pode ser expressa na forma (B.1) definindo un vetor de variáveis de decisão composto por todos os elementos significativos das variáveis matriciais.

Na manipulação de LMIs tem-se revelado muito útil o seguinte lema:

Lema B.1 (Complemento de Schur) *Dadas as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$:*

$$\begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{cases} C > 0 \\ A - B' C^{-1} B > 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

As LMIs têm numerosas aplicações na teoria de controle [15, 17, 18, 36, 37]. Muitas restrições de projeto podem ser expressas como LMIs envolvendo matrizes no espaço de estados do sistema ou do controlador [15].

Exemplos:

- **Análise de estabilidade de sistemas lineares.** Pelo teorema de Lyapunov, a estabilidade do sistema $\dot{x} = Ax$ é equivalente à existência de uma matriz simétrica X tal que:

$$\begin{aligned} A'X + XA &< 0 \\ X &> 0 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Essas condições podem ser escritas da maneira padrão (B.2):

$$\begin{bmatrix} A'X + XA & 0 \\ 0 & -X \end{bmatrix} < 0$$

onde os fatores externos são respectivamente $\mathcal{N} = I$, e $\mathcal{M} = 0$ e o fator interno \mathcal{L} exibe sua estrutura de blocos, neste caso, diagonal. A variável X possui uma estrutura dada pelo fato de ser simétrica.

- **Cálculo da norma \mathcal{H}_∞ .** Pelo teorema 1.1, a condição $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ é equivalente à existência de uma matriz $X = X' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A'X + XA & XB & C' \\ B'X & -\gamma I & D' \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Propriedade:

Uma LMI define um conjunto convexo no espaço \mathbb{R}^N das variáveis de decisão:

Dados $x_A, x_B \in \mathbb{R}^N$ que satisfazem a LMI (B.1), sua combinação convexa $x = \alpha x_A + (1 - \alpha)x_B$ também satisfaz (B.1).

Esse fato transforma as LMIs em problemas resolúveis eficientemente mediante a utilização de algoritmos de otimização convexa [35]. Podem ser considerados varios problemas standard de otimização envolvendo restrições LMI:

- **Factibilidade**

Determine, se existe, um conjunto X_1, \dots, X_K tal que:

$$\mathcal{N}'\mathcal{L}(X_1, \dots, X_K)\mathcal{N} \leq \mathcal{M}'\mathcal{R}(X_1, \dots, X_K)\mathcal{M} \tag{B.5}$$

- **Minimização de um Objetivo Linear** sujeito a restrições LMI.

$$\textit{Minimize } c'x$$

$$\textit{sujeito a : } \mathcal{N}'\mathcal{L}(x)\mathcal{N} \leq \mathcal{M}'\mathcal{R}(x)\mathcal{M} \quad (\text{B.6})$$

onde $c \in \mathbb{R}^N$ é dado.

Apêndice C

Valores Singulares

Definição C.1 Dada uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ de posto r , definimos os valores singulares de A :

$$\sigma_i \triangleq \sqrt{\lambda_i(A^*A)}, \quad i = 1, \dots, r$$

Teorema C.1 (Decomposição em valores singulares) Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ de posto r pode se decompor da forma seguinte:

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*$$

sendo $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ambas unitárias¹ e $\Sigma_r = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_r]$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$.

As colunas de U e V são chamadas de vetores singulares esquerdos e direitos, respectivamente.

Notação:

$\bar{\sigma} = \sigma_1$ é o máximo valor singular.

$\underline{\sigma} = \sigma_r$ é o mínimo valor singular.

Propriedades:

1. $\sigma_i(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \sigma_i(A + B) \leq \sigma_i(A) + \bar{\sigma}(B)$.
2. $\bar{\sigma}(A)$ é a norma induzida pela norma euclidiana entre os espaços \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^m . Para verificar esta afirmação note que pela definição de norma induzida tem-se:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\|_2 \neq 0} \sqrt{\frac{x^t A^* A x}{x^t x}}$$

¹Uma matriz M é unitária se satisfaz $MM^* = I$.

Dado que $M = A^*A$ é uma matriz *normal*, que satisfaz $MM' = M'M$, pode-se adotar um conjunto ortonormal de autovetores de M . Expressando x nessa base de \mathcal{C}^n :

$$\|A\| = \sup_{\sum x_i^2 \neq 0} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \bar{\sigma}(A)$$

O máximo valor singular $\bar{\sigma}(A)$ expressa o máximo ganho em norma euclidiana que fornece a transformação linear $y = Ax$. Esse ganho máximo se dá na direção do vetor $v_1 \in \mathcal{C}^n$, o vetor singular direito correspondente a σ_1 .

Apêndice D

Trasformações Fracionárias Lineares

Definição D.1 (Trasformações Fracionárias Lineares) *Seja M uma matriz particionada na forma*

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$$

e sejam $D_1 \subset \mathcal{C}^{q_1 \times p_1}$ e $D_2 \subset \mathcal{C}^{q_2 \times p_2}$ dois conjuntos abertos.

Definimos as Trasformações Fracionárias Lineares (LFT) como os mapas: $\mathcal{F}_l(M, \cdot) : D_2 \rightarrow \mathcal{C}^{p_1 \times q_1}$ e $\mathcal{F}_u(M, \cdot) : D_1 \rightarrow \mathcal{C}^{p_2 \times q_2}$ com

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) \triangleq M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}$$

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta_u) \triangleq M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12}$$

para todo $\Delta_l \in D_2$ e $\Delta_u \in D_1$, sempre que essas inversas existam. \mathcal{F}_l (\mathcal{F}_u) denota a Transformação Fracionária Linear inferior (superior).

Exemplos:

- Sistemas dinâmicos lineares podem ser representados mediante uma LFT:

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B = \mathcal{F}_u\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \frac{1}{s}I\right)$$

- A transformação bilinear de Tustin: $s = \frac{z+1}{z-1} = \mathcal{F}_u\left(\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}, z^{-1}\right)$

A nossa principal motivação em estudar este tipo de funções está ilustrada na figura D.1. Na figura D.1.a está representado um sistema de controle onde são separados a planta e o controlador, e é usualmente usado para **síntese**. Na figura D.1.b separa-se o sistema completo nominal de sua incerteza, interconexão que é utilizada para **análise**. Em forma

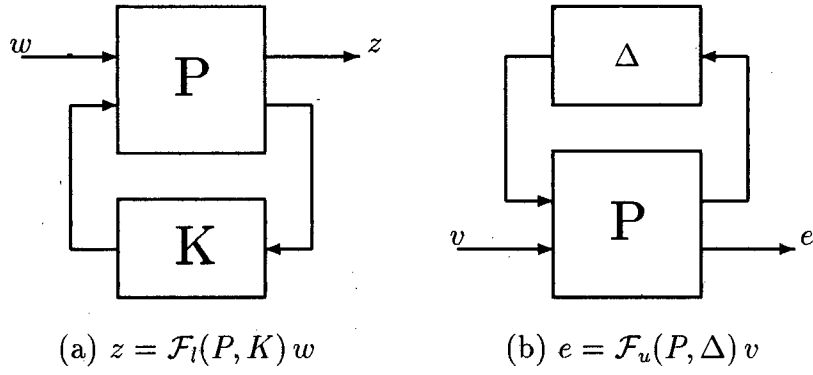


Figura D.1: *Transformações Fracionárias Lineares*

alternativa, podem ser representados explicitamente os três principais componentes de um sistema de controle incerto: a planta, o controlador e a incerteza (figura D.2). Para uma introdução ao álgebra das LFTs e uma discussão mais profunda de suas características pode-se consultar [24, 32, 63].

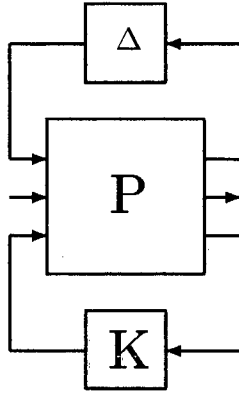


Figura D.2: *Sistema Controlado Incerto*

Apêndice E

Exemplo

Modelo nominal

$$A = \begin{bmatrix} -.0199 & -.0058 & -.0058 & -.0151 & .0232 & .0006 & 0 & -.6652 \\ -.0452 & -.0526 & -.0061 & -.0260 & -.0155 & .0148 & .6648 & -.0003 \\ -.0788 & -.0747 & -.3803 & .0008 & -.0048 & .0420 & .0228 & .0102 \\ .4557 & -2.5943 & -.1787 & -2.9979 & -.5308 & .4155 & 0 & 0 \\ .3688 & .1931 & -.1753 & .0710 & -.5943 & .0013 & 0 & 0 \\ 1.0939 & .7310 & -.0358 & .4058 & .4069 & -.4940 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & .0005 & -.0154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .9994 & .0343 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -.0456 & -.0083 & .4735 & -.0016 \\ -.0369 & .2785 & .0086 & .3600 \\ -3.1126 & -.0032 & .0076 & .0002 \\ -2.4241 & 20.8327 & 1.0196 & 9.1903 \\ -.3205 & .2538 & -6.3329 & -.0648 \\ 5.7889 & -2.6208 & 2.3832 & -11.0904 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fatores de escala

u, v, w	:	16.67	<i>ft/s</i>
r	:	20	<i>graus/s</i>
θ, ϕ	:	20	<i>graus</i>
δ_{colM}	:	9	<i>graus</i>
δ_{lat}	:	8.75	<i>graus</i>
δ_{long}	:	15	<i>graus</i>
δ_{colT}	:	18.5	<i>graus</i>

Variações paramétricas devidas ao peso

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.0020 & -0.0007 & 0 & -0.0007 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0053 & 0.0009 & 0 & -0.0009 & -0.0007 & -0.0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0220 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0449 & -0.4598 & 0 & -0.0729 & -0.0130 & 0.0077 & 0 & 0 \\ 0.0302 & 0.0169 & -0.0022 & 0.0017 & -0.0145 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0135 & -0.0032 & 0.0075 & 0 & -0.0005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0.0012 & -0.0004 & 0.0208 & 0 \\ 0.0001 & 0.0122 & 0.0004 & -0.0187 \\ 0.1803 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1665 & 0.5083 & 0.0249 & 0.1690 \\ 0.0002 & 0.0062 & -0.1545 & -0.0039 \\ 0.2748 & 0 & 0 & -0.2039 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo de referência

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A_M & B_M \\ \hline I & 0 \end{array} \right]$$

$$A_M = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Apêndice F

Transparências da Defesa

CONTROLE ROBUSTO
- TEORIA E APLICAÇÃO NO PROJETO DE
CONTROLADORES DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE -

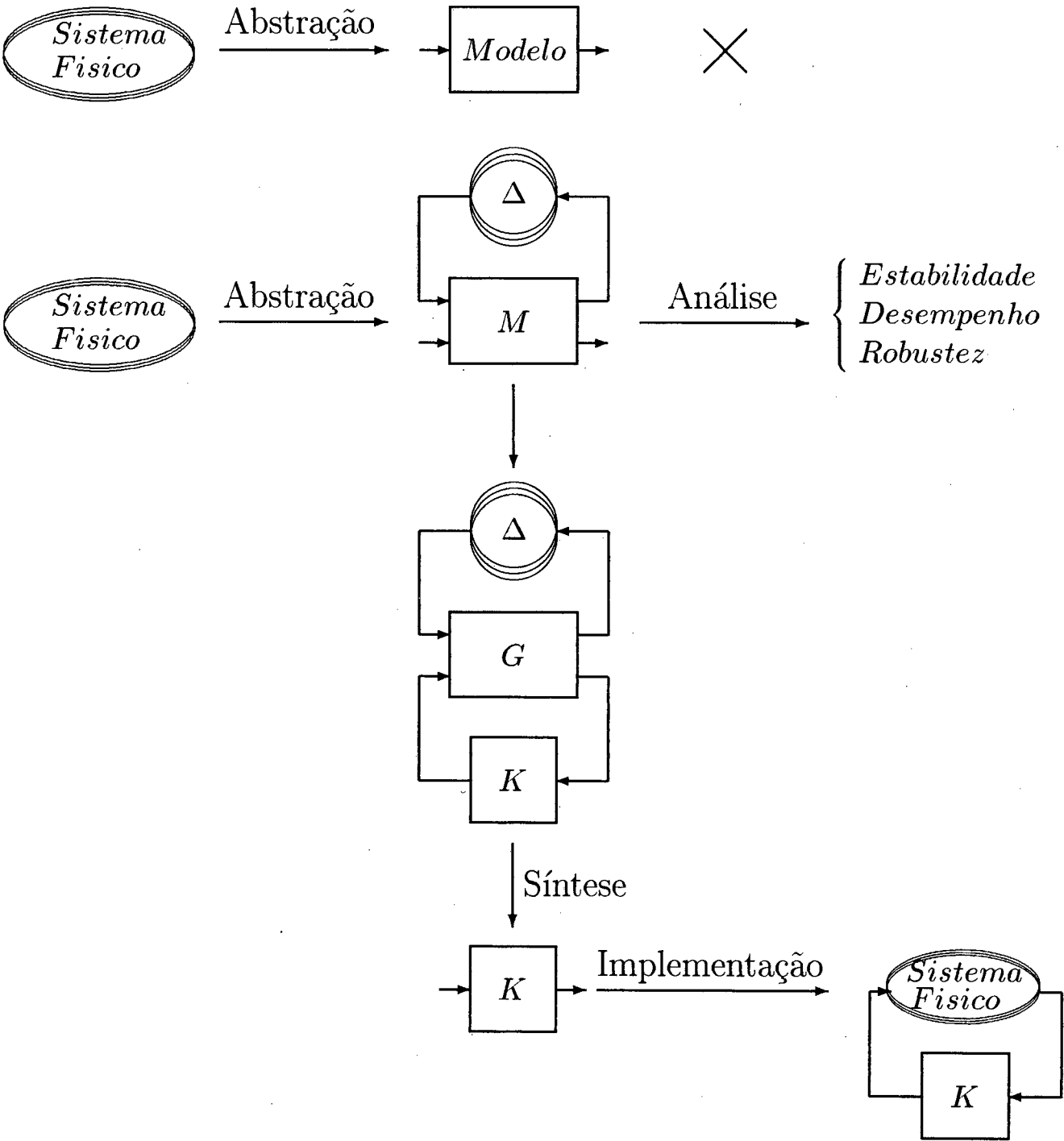
Mestrando: Alvaro Giusto
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto
Co-orientador: Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto

FLORIANÓPOLIS
Maio de 1995

PLANO

- Introdução
- 1. Normas
- 2. Modelagem de Sistemas Incertos
- 3. Análise de Sistemas Incertos
- 4. Síntese de Controladores
- 5. Controladores de Dois Graus de Liberdade
- 6. Exemplo de Aplicação
- 7. Conclusões e Perspectivas

INTRODUÇÃO



1. NORMAS

Norma de matrizes:

$$\|A\| \triangleq \max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Norma 2 de sinais:

$$\|v(t)\|_2 \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \|v(t)\|^2 dt = \textit{Energia}$$

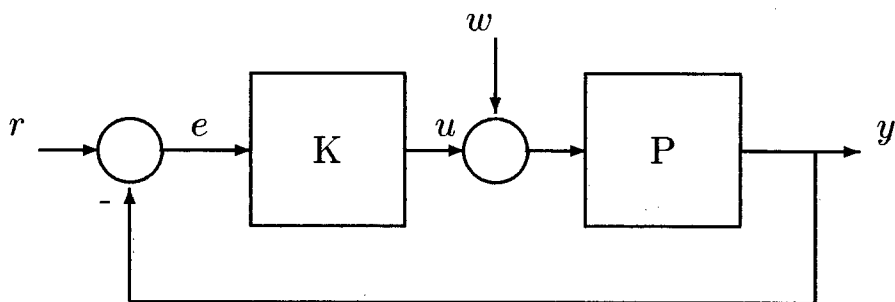
Norma \mathcal{H}_2 de sistemas:

$$\|H(s)\|_2 \triangleq \|h(t)\|_2 = \textit{Energia da Resposta Impulsional}$$

Norma \mathcal{H}_∞ de sistemas:

$$\|H(s)\|_\infty \triangleq \max_\omega \|H(j\omega)\| = \textit{Máximo da Resposta em Freqüência}$$

Critérios de Desempenho



$$\begin{cases} r = r_0(t) \text{ conhecido} \\ w \in \{w(t) : \|w(t)\|_2 < \infty\} \end{cases}$$

$\Rightarrow \|T_{er}R_0(s)\|_2 = \text{Seguimento de sinais de referência}$

$\Rightarrow \|T_{yw}(s)\|_\infty = \text{Rejeição de perturbações no Pior Caso}$

2. MODELAGEM DE SISTEMAS INCERTOS

Origem da Incerteza:

- Desconhecimento parcial do processo físico
- Complexidade
- Variações paramétricas

Tipos de Incerteza:

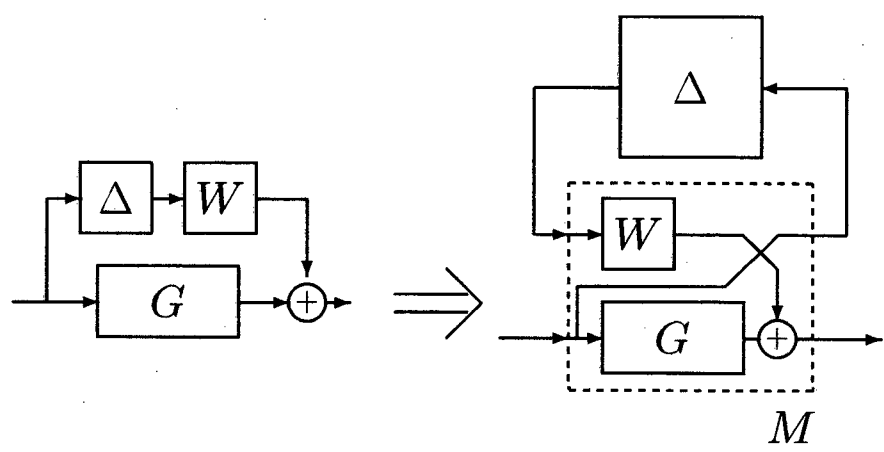
- Incerteza Paramétrica
- Incerteza Dinâmica
- Incerteza Estruturada

Compromissos na modelagem:

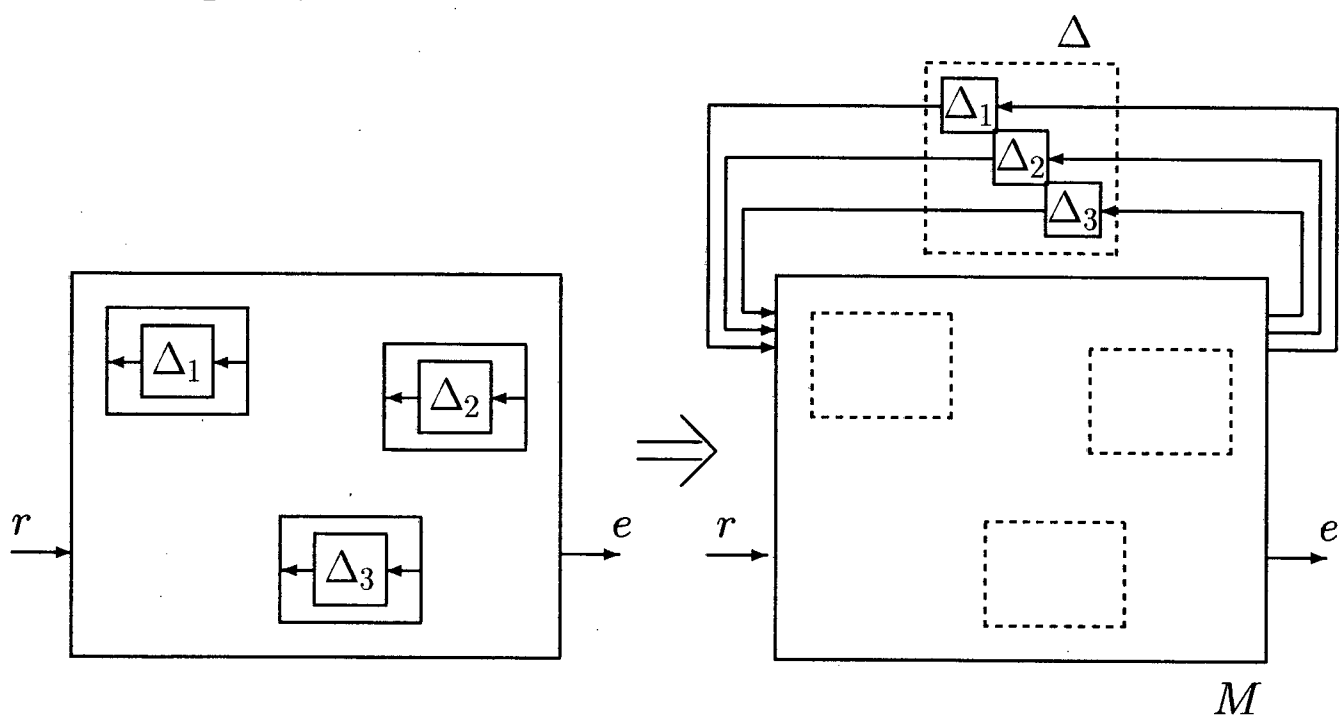
- Simplicidade
- Generalidade
- Exatidão
- Pessimismo

- Incerteza Dinâmica

$$\mathcal{G} = G + W\Delta; \quad \|\Delta\|_{\infty} < 1$$

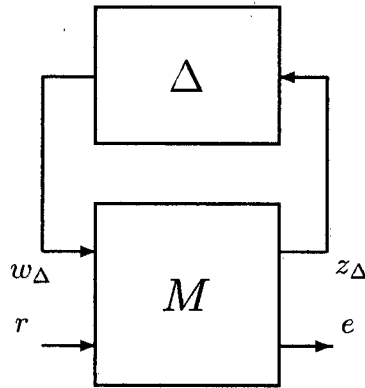


- Incerteza Paramétrica ✓
- Composição de elementos incertos



Modelagem de Sistemas Incertos

Sumário



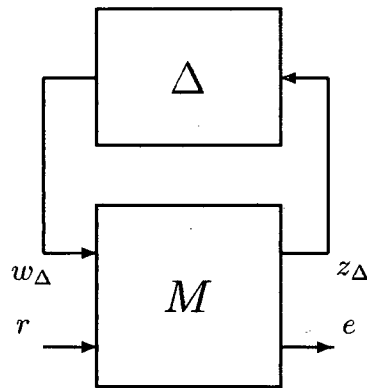
$$\begin{bmatrix} z_{\Delta} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\Delta} \\ r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\Delta = \{\Delta : \Delta \text{ estruturado}, \|\Delta\|_{\infty} < 1\}$$

$$e = \mathcal{F}_u(M, \Delta)r$$

- Incerteza Dinâmica ✓
- Incerteza Paramétrica ✓
- Incerteza Estruturada ✓

3. ANÁLISE de SISTEMAS INCERTOS



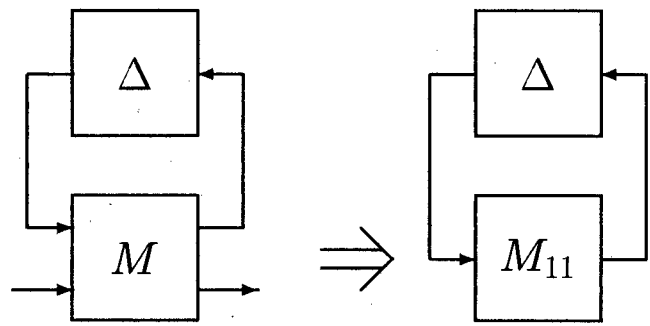
$$e = \mathcal{F}_u(M, \Delta)r$$

$$\mathbf{B}\Delta = \{\Delta : \Delta \text{ estruturado}, \|\Delta\|_\infty < 1\}$$

Objetivos da análise:

- Estabilidade Nominal \checkmark
- Desempenho Nominal: $\|\mathcal{F}_u(M, 0)\|_\infty = \|M_{22}\|_\infty < 1$
- Estabilidade Robusta: $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$ estável $\forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta$
- Desempenho Robusto: $\|\mathcal{F}_u(M, \Delta)\|_\infty < 1 \quad \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta$

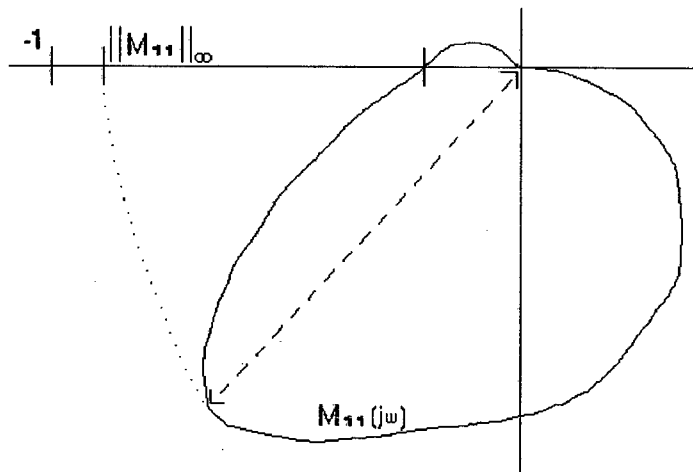
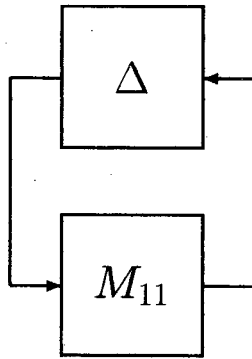
I. Estabilidade Robusta



Margem de Estabilidade

$$K_m(G(s)) \triangleq \min_{\Delta} \{ \|\Delta\|_{\infty} : \exists s \in \mathcal{C}_+ \det[I + G\Delta] = 0 \}$$

<div>Incerteza</div> <div>Δ</div>	<div>Margem de Estabilidade</div> <div>K_m</div>	<div>Incerteza padronizada</div>	<div>Condição de Estabilidade Robusta</div>
δ real	Margem de ganho	$ \delta < 1$	$K_m \geq 1$
$e^{j\theta}$	Margem de fase	$ \theta < 1$	
Δ não estruturada	$\frac{1}{\ M_{11}\ _{\infty}}$	$\ \Delta\ _{\infty} < 1$	
Δ estruturada	K_m	$\mathbf{B}\Delta$	



Estabilidade Robusta não estruturada $\iff \ M_{11}\ _{\infty} \leq 1$
--

$$\|\cdot\|_{\infty} \implies \begin{cases} \text{Desempenho} \\ \text{Estabilidade Robusta} \end{cases} !!$$

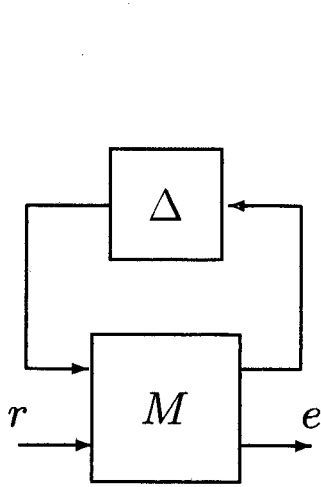
Valor Singular Estruturado

$$\mu(G(j\omega)) \triangleq \frac{1}{\min_{\Delta} \{ \|\Delta\| : \det[I + G(j\omega)\Delta] = 0 \}}$$

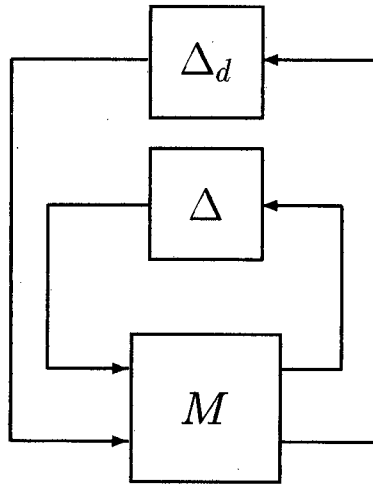
$$\|G(s)\|_{\mu} \triangleq \max_{\omega} \mu[G(j\omega)] = \frac{1}{K_m}$$

Estabilidade Robusta $\iff \|M_{11}\|_{\mu} \leq 1$

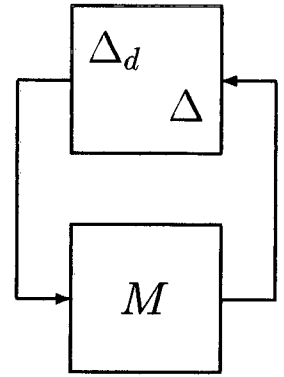
II. Desempenho Robusto



$$\|T_{er}\|_{\infty} < 1 \quad \forall \Delta$$



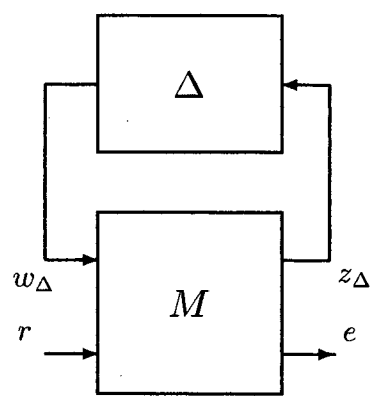
$$\text{Estabilidade } \forall \Delta_d, \Delta$$



$$\text{Estabilidade Robusta}$$

Desempenho Robusto $\iff \|M\|_{\mu} \leq 1$

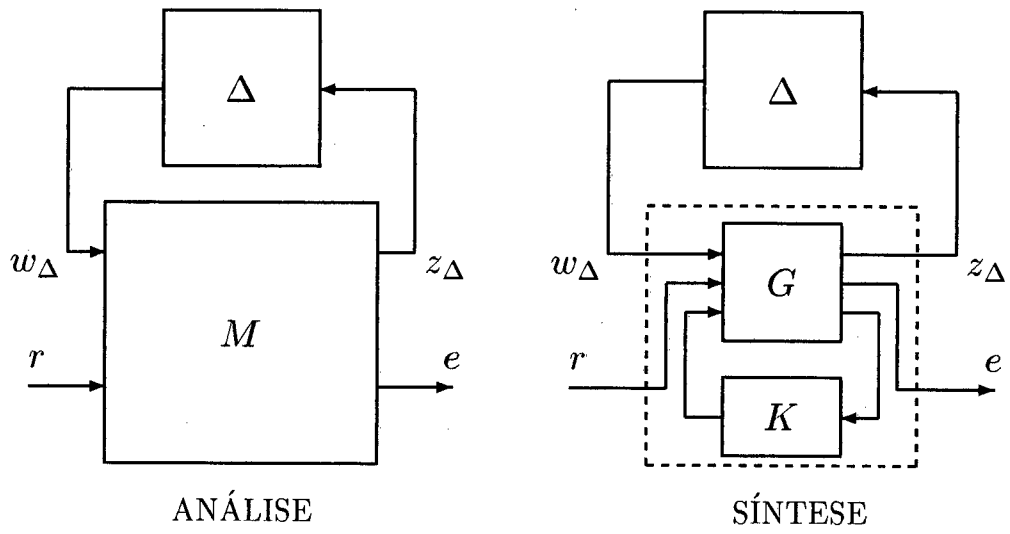
Análise de Sistemas Incertos



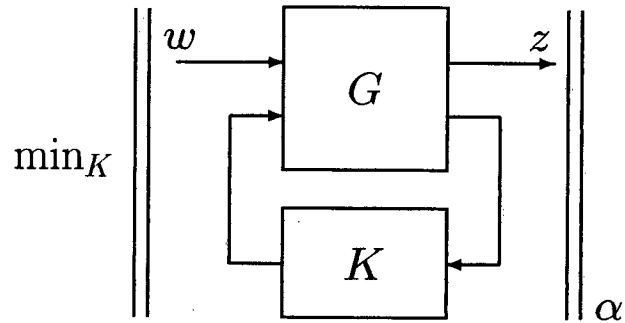
Sumário

Incerteza	Estabilidade	Desempenho
$\Delta = 0$	$\mathcal{Re}(\lambda) < 0$	$\ M_{22}\ _\infty \leq 1$
Δ não estruturada	$\ M_{11}\ _\infty \leq 1$	$\ M\ _\mu \leq 1$
Δ estruturada	$\ M_{11}\ _\mu \leq 1$	$\ M\ _\mu \leq 1$

4. SÍNTESE DE CONTROLADORES



Problema de Síntese Padrão



$$\min_K \|T_{zw}\|_\alpha \quad \alpha = 2, \infty, \mu$$

Síntese de Controladores

Problema Padrão em \mathcal{H}_2 :

- Equivalente a LQG
- Rejeição de perturbações de *forma conhecida*
- Duas equações algébricas de Riccati
- $\text{o}(K) = \text{o}(G)$

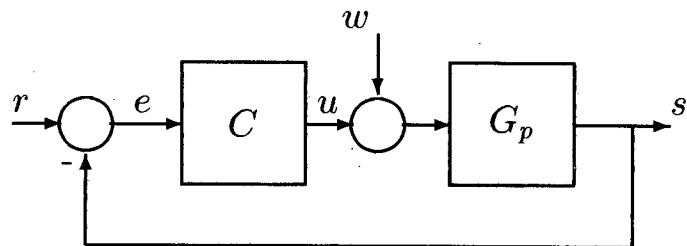
Problema Padrão em \mathcal{H}_∞ :

- Rejeição de perturbações *no pior caso*
- Estabilidade robusta não estruturada
- Duas equações algébricas de Riccati + iteração
- $\text{o}(K) = \text{o}(G)$

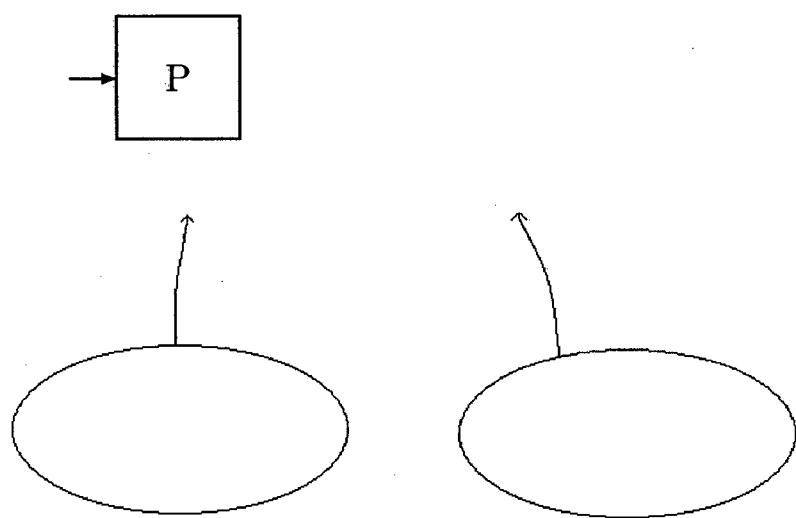
μ -Síntese:

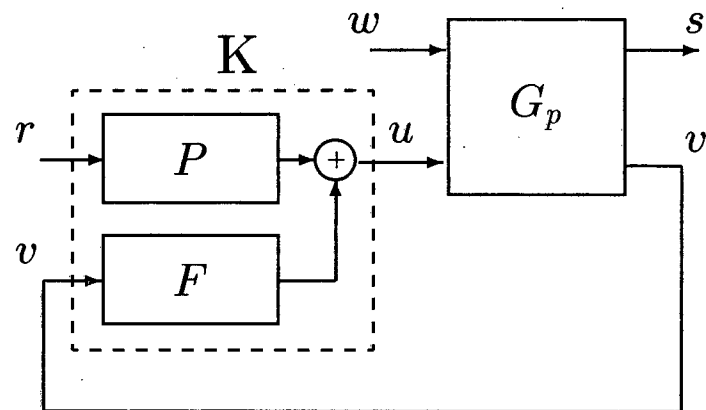
- Estabilidade / desempenho robusto estruturado
- Solução subótima
- $\text{o}(K) \geq \text{o}(G)$

5. CONTROLADORES de DOIS GRAUS DE LIBERDADE



Propriedades Entrada / Saída	Propriedades da malha
<ul style="list-style-type: none"> • Resposta a comandos • Desacoplamento entre canais • Seguimento <p>$\Rightarrow T_{sr}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Rejeição de perturbações • Alocação de pólos • Estabilidade • Regulação • Robustez <p>$\Rightarrow T_{sw}$</p>





$F \implies$ Rejeição de perturbações. Estabilidade. Robustez.
 $P \implies$ Seguimento de sinais de referência.

Técnicas de Projeto

Síntese de F + Síntese de P	Síntese de K
Flexibilidade	
Desempenho	
$o(K) \geq 3o(G_p) + \dots$	$o(K) \geq o(G_p) + \dots$

Projeto em dois passos com ordem reduzida

I. Síntese de F

$$\mu, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_\infty, \dots \implies F$$

II. Síntese de P tal que $o(K) = o(F)$

Dado

$$F(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_v \\ \hline C_F & D_v \end{array} \right]$$

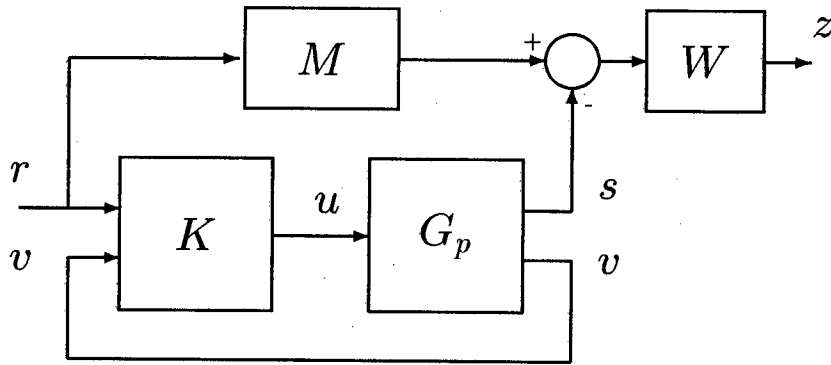
Adotamos

$$K^*(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_F & B_r & B_v \\ \hline C_F & D_r & D_v \end{array} \right]$$

$$\implies P(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_r \\ \hline C_F & D_r \end{array} \right]$$

$$\mathcal{R} \triangleq \left[\begin{array}{c} B_r \\ D_r \end{array} \right]$$

- P "aproveita" a dinâmica de F
- $o(K) = o(F)$



$$T_{zr} = \left[\begin{array}{c|c} A & B_0 + B_1 \mathcal{R} \\ \hline C & D_0 + D_1 \mathcal{R} \end{array} \right]$$

Problema \mathcal{H}_∞

Existe \mathcal{K}^* tal que $\|T_{zr}\|_\infty < \gamma$

\Longleftrightarrow

existem \mathcal{Y} e \mathcal{R} tais que

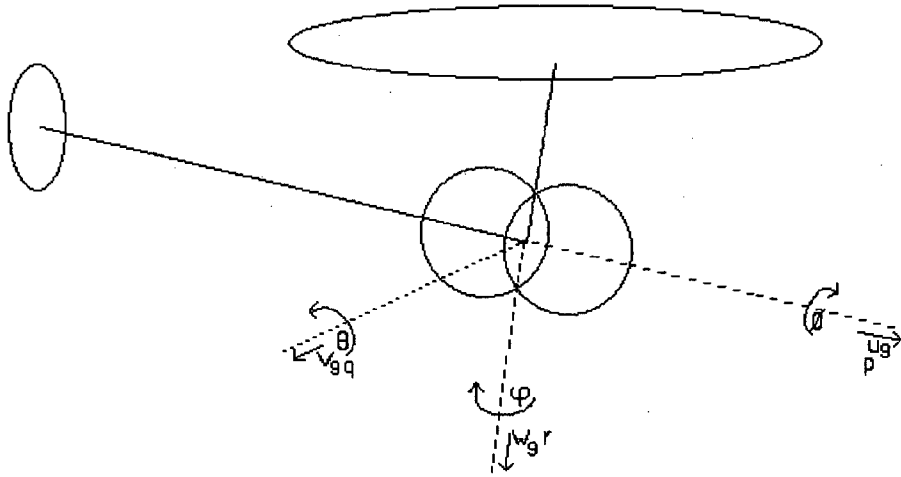
$$\left[\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}A' + A\mathcal{Y} & B_0 + B_1 \mathcal{R} & \mathcal{Y}C' \\ B_0' + \mathcal{R}'B_1' & -\gamma I & D_0' + \mathcal{R}'D_1' \\ C\mathcal{Y} & D_0 + D_1 \mathcal{R} & -\gamma I \end{array} \right] < 0$$

Problema \mathcal{H}_2

$$\min_{\mathcal{K}^*} \|T_{zr}\|_2 \Longleftrightarrow \mathcal{R} = -(B_1' L_o B_1)^{-1} B_1' L_o B_0$$

onde $A' L_o + L_o A + C' C = 0$

6. EXEMPLO de APLICAÇÃO



u_g, v_g, w_g : velocidade linear

p, q, r : velocidade angular

ϕ, θ, ψ : atitude

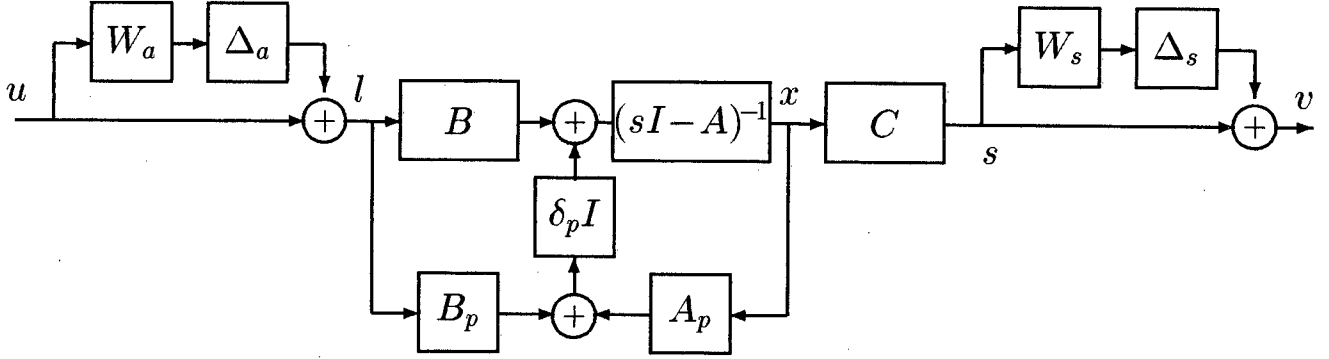
Ação de controle

$$\delta_M(\xi) = \delta_{colM} - \delta_{lat}\cos\xi - \delta_{long}\sin\xi$$

$$\delta_T = \delta_{colT}$$

$$\Rightarrow u = [\delta_{colM}, \delta_{lat}, \delta_{long}, \delta_{colT}]'$$

Modelo do sistema incerto



Dinâmica do helicóptero

$$\begin{cases} \dot{x} = [A + A_p \delta_p]x + [B + B_p \delta_p]u \\ s = Cx \end{cases} ; |\delta_p| < 1$$

$$s = [w_g, p, q, r, \phi, \theta]'$$

Atuadores

$$\mathcal{G}_a(s) = [I + W_a(s)\Delta_a]$$

$$W_a(s) = \frac{0.1s}{s+60}I$$

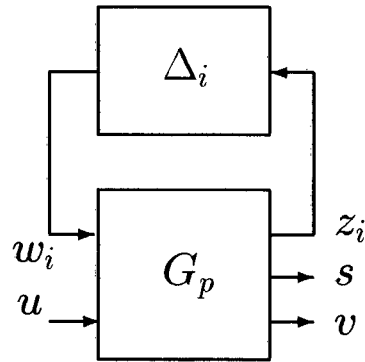
$$\Delta_a = \text{diag}\{\delta_{a1}, \dots, \delta_{a4}\}$$

Sensores

$$\mathcal{G}_s(s) = [I + W_s(s)\Delta_s]$$

$$W_s(s) = 0.1I$$

$$\Delta_s = \text{diag}\{\delta_{s1}, \dots, \delta_{s6}\}$$



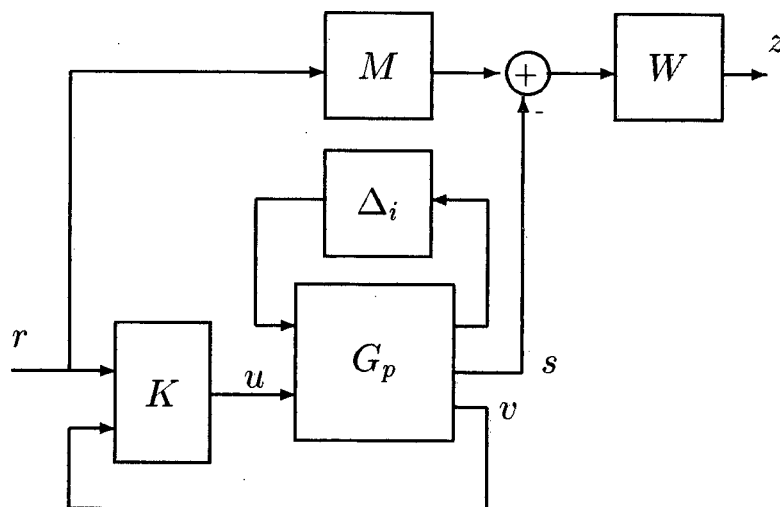
$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \Delta_a & & \\ & \Delta_s & \\ & & \delta_p I \end{bmatrix}$$

Especificações de desempenho

- **Resposta em atitude** em *pitch* e *roll*
- **Resposta em velocidade** em *heave* e *yaw*
- **Larguras de faixa:**
 - pitch : $\omega_{BW} > 2.0 \text{ rad/s}$
 - roll : $\omega_{BW} > 3.5 \text{ rad/s}$
 - yaw : $\omega_{BW} > 3.5 \text{ rad/s}$
- **Amortecimento:** $\xi > 0.35$
- **Acoplamento** $< 25 \%$

PROJETO

I. μ -Síntese de K

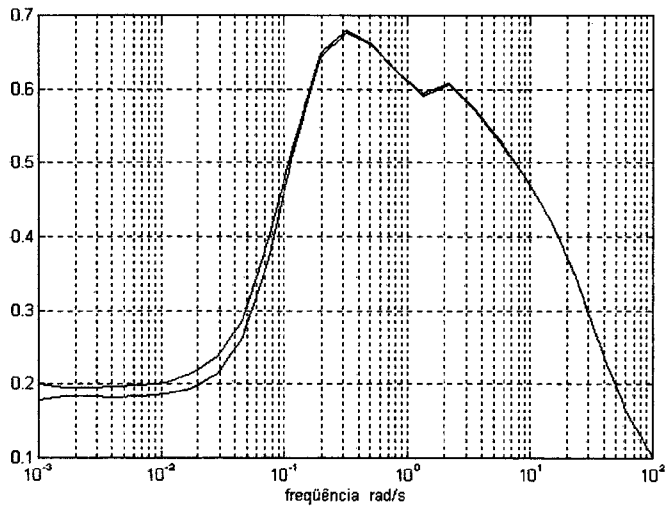


Modelo de referência M :

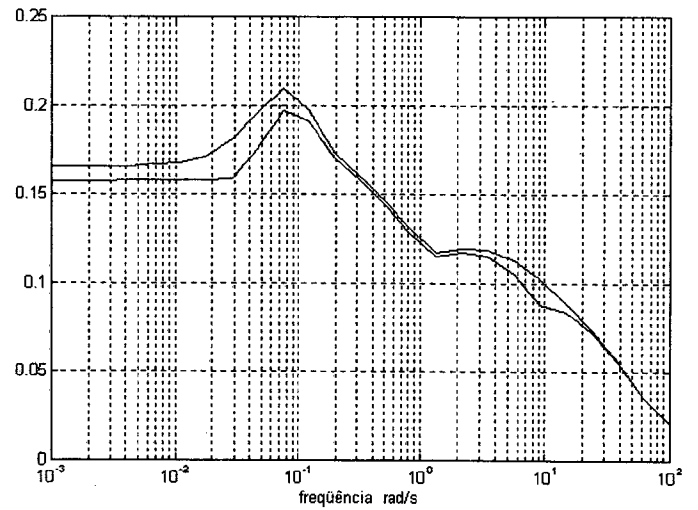
$$\frac{\theta}{\theta_c} = \frac{\phi}{\phi_c} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{r}{r_c} = \frac{w}{w_c} = \frac{\lambda}{s + \lambda}$$

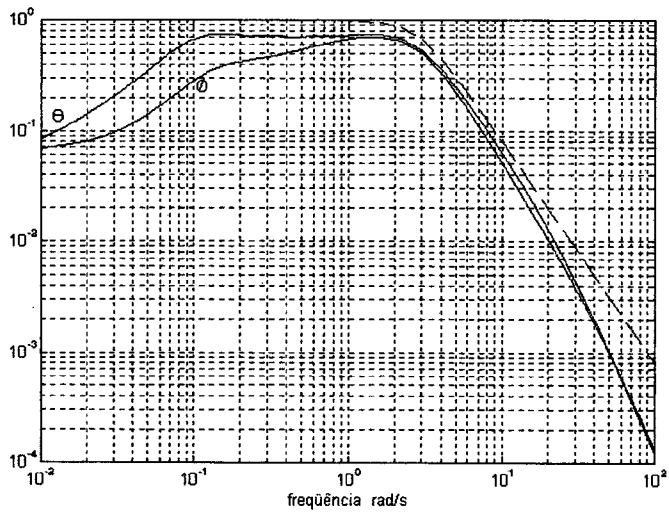
$$\mu\text{-Síntese} \Rightarrow K_1(s)$$



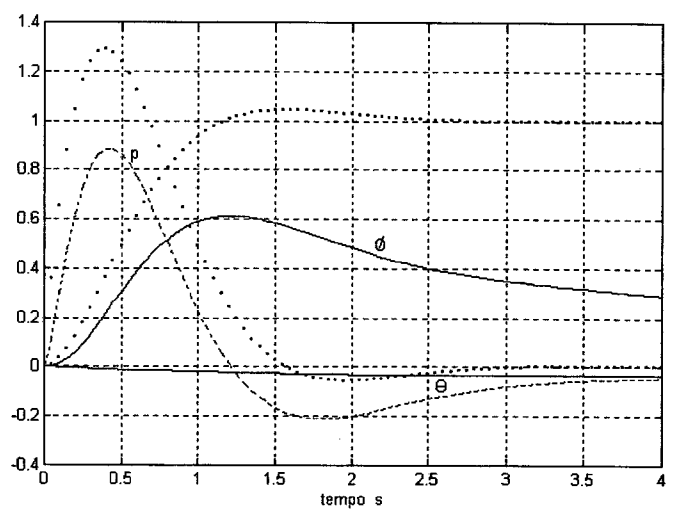
(a) Desempenho Robusto



(b) Estabilidade Robusta

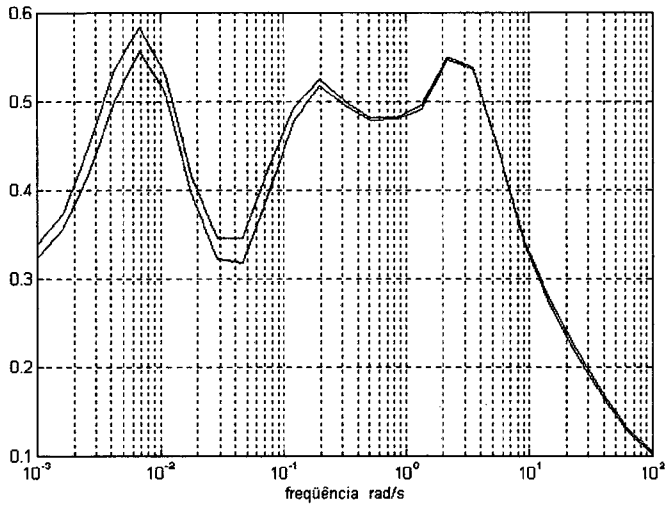


(c) Resposta em *pitch* e *roll*

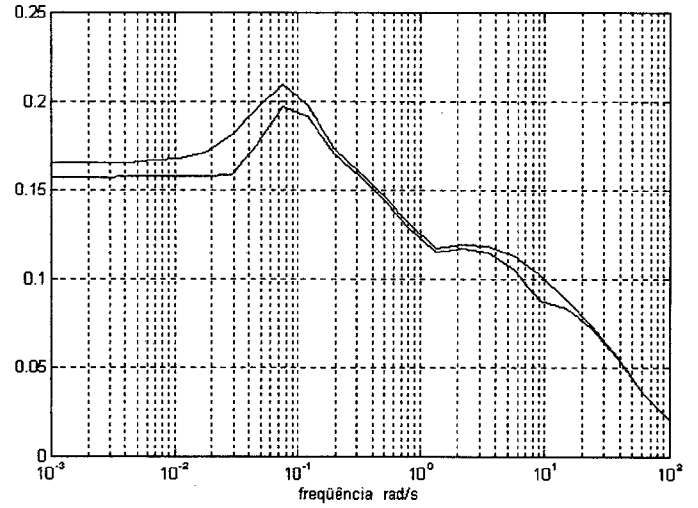


(d) Resposta ao degrau em *roll*

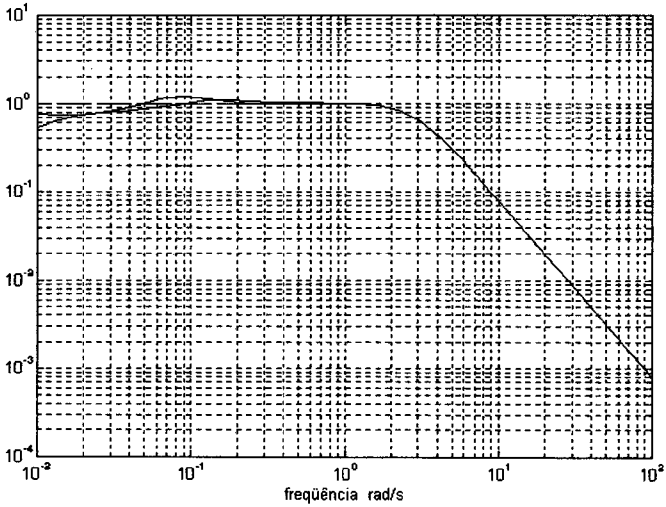
Análise em malha fechada para K_1



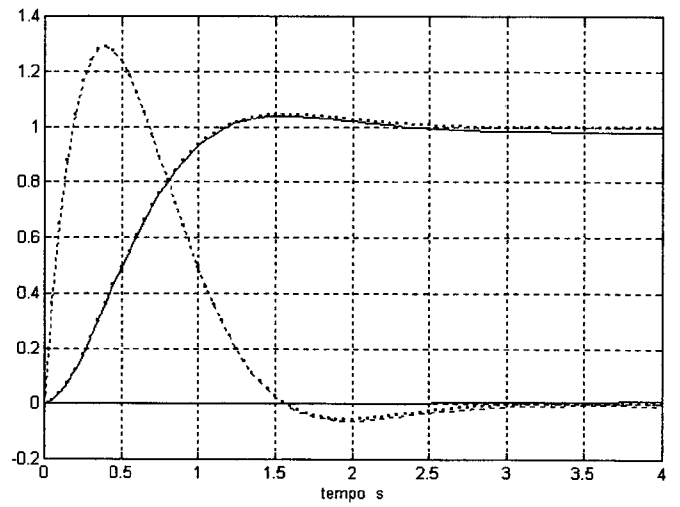
(a) Desempenho Robusto



(b) Estabilidade Robusta



(c) Resposta em *pitch* e *roll*



(d) Resposta ao degrau em *roll*

Análise em malha fechada para K_2

7. CONCLUSÕES e PERSPECTIVAS

Controle Robusto

- Sistemas Multivariáveis Lineares Incertos
- Hipóteses realistas
- Normas
- Condições fortes e calculáveis

Controladores de Dois Graus de Liberdade

- Duas classes de especificações de desempenho
- Síntese independente
- Técnicas de projeto de ordem reduzida

Exemplo

- Problema multivariável
- Modelagem + Síntese + Análise

Perspectivas

- Extensão das técnicas de projeto de prefiltros
- Controle Robusto para Sistemas LPV